En la presente edición, como en las anteriores, se ha mantenido el propósito de las Directivas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia y del autor, de presentar un texto que facilite el trabajo de los estudiantes y profesores en la formación de profesionales de la Ingeniería Civil con un manejo apropiado de los fundamentos del diseño de elementos estructurales de concreto reforzado. Esta séptima edición está de acuerdo con el Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente NSR-10 basado en la Ley 400 de 1997(Modificada Ley 1229 de 2008) y los Decretos 926 del 19 de marzo de 2010 y el Decreto 092 del 11 de Enero de 2011 y se ha tenido en cuenta nuevas metodologías de utilización en el diseño del concreto estructural y su refuerzo en barras de acero.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERIA

JORGE I. SEGURA FRANCO Séptima Edición

ESTRUCTURAS DE CONCRETO I

ESTRUCTURAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERIA

ESTRUCTURAS DE CONCRETO I

JORGE IGNACIO SEGURA FRANCO

Séptima Edición

De acuerdo con el Reglamento Colombiano de Diseño y Construcción Sismo-Resistente NSR-10

ESTRUCTURAS DE CONCRETO I

JORGE IGNACIO SEGURA FRANCO
Profesor Asociado
Universidad Nacional de colombia

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERIA

7ª. Edición. Bogotá, 2011-03-30
© Jorge Ignacio Segura Franco
© Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería
© Ayala Avila & Cia Ltda.

ISBN 978-958-99888-0-0
Gráficas: Ing. Camilo Contreras Rojas.
Diagramación y Artes Finales : Ayala Avila & Cia.

Derechos Editoriales Reservados

Presentación

En el marco de la celebración de los ciento cincuenta años, es un inmenso honor para el Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, presentar la séptima edición del libro Estructuras de Concreto I del profesor Emérito Jorge Ignacio Segura Franco.

El autor pretende con este libro trasmitir y dejar un legado de conocimiento a generaciones futuras, quienes tendrán que desempeñarse en el maravilloso campo de las estructuras de concreto. La experiencia docente, investigativa y profesional del ingeniero Segura es la mejor carta de presentación de esta nueva edición del libro. El autor se ha destacado como docente de la Universidad Nacional de Colombia desde el año 1967 y ha sido ganador de la Mención de Honor del premio Diódoro Sánchez. Así mismo, ha sido coautor de las Normas de Diseño y Construcción Sismo Resistente en Colombia.

El lector encontrará que en el contenido del libro se analizan con detalle los conceptos relacionados con el diseño estructural para los materiales en concreto y refuerzo con acero. El texto ha sido actualizado con las disposiciones establecidas en el Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente NSR-10 e incorpora el uso de nuevas tecnologías y métodos modernos de análisis. Esta obra es fruto de años de trabajo, perseverancia y representa una herramienta valiosa de trabajo a la comunidad académica y a los especialistas que trabajan en el área.

En nombre del Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola quiero expresar un merecido reconocimiento y agradecimiento al profesor Segura por su permanente iniciativa, constancia y dedicación con miras a impulsar y desarrollar la infraestructura en un país como el nuestro, que demanda de sus profesionales un alto nivel técnico.

Carol Andrea Murillo Feo
Director de Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola
Av. NQS (Carrera 30) No 45-03 Edificio 453 Oficina 201
Tel 57 (1) 3165000 Ext. 14020

A mi esposa, Maruja Franco y a mis hijas Ana María y María Lucia.

CONTENIDO

INTRODUCCION.....XIII

CAPITULO 1
Materiales

Concreto, Refuerzo y Concreto Reforzado 3
Características de los materiales 4
Dimensiones nominales de las barras de refuerzo 11

CAPITULO 2
Flexión

Método de los Esfuerzos Admisibles o Método Elástico

Generalidades 15
Vigas rectangulares con armadura a la tracción 18
Método de la Sección Transformada u Homogénea para
vigas rectangulares con armadura a la tracción 35
vigas 'T' con armadura a la tracción (revisión mediante
Sección Transformada) 40
Vigas rectangulares con armadura a la tracción y a la
compresión 48
Aplicación del Método de la Sección Transformada para
vigas con armadura a la tracción y a la compresión 52
Conclusiones Método Elástico 57

Método de la Resistencia Ultima

Generalidades 58
Estados límites 59
Vigas rectangulares con armadura a la tracción 60
Factores de seguridad 72
Coeficiente de carga y combinaciones de carga 72
Coeficiente de reducción de resistencia 75
Refuerzo mínimo de elementos en flexión 77
Vigas rectangulares con armadura a la tracción y a la compresión 85
Reducción de deflexiones a largo plazo 96
Vigas con sección 'T' - Características y diseño con armadura a la tracción 102
Deflexiones y control de deflexiones 116

CAPITULO 3
Cortante y Torsión

Esfuerzo Cortante

Generalidades 133
Resistencia a la fuerza cortante proporcionada por el concreto 135
Resistencia a la fuerza cortante proporcionada por el refuerzo 135
Límites de espaciamiento para el refuerzo a cortante 137
Refuerzo mínimo de cortante 138
Estribos perpendiculares 139
Refuerzo longitudinal doblado 141

Torsión

Generalidades 158
Problema resuelto 161

CAPITULO 4
Longitud de Desarrollo y Empalmes de Refuerzo

Generalidades 173
Desarrollo del refuerzo a flexión 173
Desarrollo del refuerzo para momento positivo 174
Desarrollo del refuerzo para momento negativo 175
Empalmes de refuerzo 176
Gancho estándar 178
Desarrollo de barras corrugadas y alambre corrugado a tracción 185
Desarrollo de barras corrugadas y alambre corrugado a tracción (Caso general) 190
Desarrollo de barras corrugadas a compresión 203
Ganchos estándar a tracción 205
Desarrollo de las barras corrugadas con cabeza y ancladas mecánicamente en tracción. 211
Desarrollo de malla electrosoldada de alambre corrugado 215
Problema resuelto 216

CAPITULO 5
Sistemas de Losas Armadas en Una Dirección

Generalidades 225
Losas macizas 225
Escaleras 233
Losas nervadas 237

CAPITULO 6
Columnas

Generalidades 267

Dimensionamiento 268
Refuerzo longitudinal 269
Refuerzo transversal 272
Columnas con carga axial 281
Columnas con carga axial y momento 286
Problemas resueltos 292
Efectos de esbeltez en elementos a compresion 309
Diseño de columnas. Problema resuelto 314

CAPITULO 7
Sistemas de Losas en Dos Direcciones

Generalidades 333

Sistemas de losas en dos direcciones apoyadas o soportadas sobre muros o vigas rígidas 336

Métodos de los coeficientes (NSR-10) 336
Ejemplo. Diseño de una losa maciza 338
Ejemplo. Diseño de una losa aligerada 350

Métodos plásticos de análisis y diseño 357
Método de las líneas de fluencia 357
Ejemplo. Diseño de una losa maciza 359
Ejemplo. Diseño de una losa aligerada 363

Sistemas de losas en dos direcciones apoyadas o soportadas en columnas 368

Método Directo de diseño 370
Ejemplo. Losa maciza 370
Ejemplo. Losa aligerada 377

Método del Pórtico Equivalente 382

Ejemplo. Diseño de una losa maciza 384
Ejemplo. Diseño de una losa aligerada 403

CAPITULO 8
Cimentaciones

Generalidades 425

Cimentaciones superficiales o directas 425

Cimentación para muros 428

Cimentación aislada para columnas 433
Zapatas aisladas cuadradas para columnas cuadradas 433
Zapatas aisladas rectangulares para columnas cuadradas 443
Zapatas aisladas rectangulares para columnas rectangulares 449

Zapatas con carga axial y momento de flexión 455
Cimentación combinada para dos columnas 461
Cimiento combinado para dos columnas con sección en forma de "T" invertida 470
Cimentación con viga de contrapeso 482

Cimentaciones de profundidad 495
Cimentación sobre pilotes 495
Cimentación sobre cajones 507

CAPITULO 9
Muros de Contención

Generalidades 517

Muros en voladizo 518
Ejemplo. Diseño de un muro en voladizo 522

CAPITULO 10
Edificios en estructura de concreto reforzado

Generalidades 539

Procedimiento de diseño 539

APENDICES

Tablas para diseño a la flexión de vigas rectangulares con armadura a la tracción por el método elástico 555

Tablas para diseño a la flexión de vigas rectangulares con armadura a la tracción por el método de la resistencia última .. 571

Indice Alfabético 581

REFERENCIAS 589

INTRODUCCIÓN

En la presente edición, como en las anteriores, se ha mantenido el propósito de la Directivas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia y del autor, de presentar un texto que facilite el trabajo de los estudiantes y profesores en la formación de profesionales de la Ingeniería Civil con un manejo apropiado de los fundamentos del diseño de elementos estructurales de concreto reforzado. Esta séptima edición está de acuerdo con el Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente NSR-10 basado en la Ley 400 de 1997 (Modificada Ley 1229 de 2008) y los Decretos 926 del 19 de marzo de 2010 y el Decreto 092 del 17 de Enero de 2011 y en ella se ha tenido en cuenta nuevas metodologías de utilización en el diseño del concreto estructural y su refuerzo en barras de acero.

Algunos de los principales cambios y actualizaciones presentes en los desarrollos teóricos y los modelos de aplicación del presente texto se refieren desde el detallado del refuerzo y la protección que le suministra el concreto hasta la utilización del modelo puntal-tensor en un diseño de una cimentación sobre pilotes, pasando por las consideraciones de análisis y diseño del los elementos estructurales de concreto reforzado, los requisitos para la integridad estructural, la utilización de las cargas prescritas en los Títulos A y B del Reglamento, el módulo de elasticidad, los requisitos de resistencia y funcionamiento de reciente actualización, las suposiciones de diseño y su adecuación a las especificaciones de secciones controladas por tracción desplazando la limitación de cuantía de Reglamentos anteriores, la actualización de las tablas de diseño a la flexión por los métodos elástico y de la resistencia, la distribución del refuerzo en flexión en vigas y losas en una dirección, las dimensiones de diseño, los límites del refuerzo y los efectos de esbeltez en elementos sometidos a flexión y carga axial, el tratamiento de la resistencia al cortante y el diseño de los refuerzos correspondientes, las longitudes de desarrollo y empalmes de refuerzo con tabulaciones actualizadas incluyendo las que corresponden a las denominadas barras de refuerzo con cabeza, las metodologías de diseño de acuerdo al uso en el país para el diseño de losas en una y dos direcciones, la actualización en el diseño de las fundaciones sobre zapatas, pilotes y cajones

de cimentación, lo relacionado con los muros de contención y los requisitos actuales para el diseño de estructuras sismo resistentes, entre otros.

Al término de los trabajos relacionados con esta edición, expreso mis agradecimientos a las Directivas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, a su Decano el Ingeniero Diego Fernando Hernández Losada por su permanente apoyo y estímulo, al Consejo Directivo y a la Ingeniera Carol Andrea Murillo Feo, Directora del Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola, quien a su vez tuvo a bien hacer la presentación del texto con generosas palabras que honran al autor. Igualmente expreso mi agradecimiento al Ingeniero Carlos Enrique Velez Ayala, quien dirigió el equipo de edición en la transcripción del manuscrito al texto final y su corrección y al Ingeniero Camilo Contreras Rojas por su colaboración en la revisión y actualización de las tablas que acompañan el texto, ambos ex alumnos de mis cursos y de excelente desempeño académico y profesional y un especial agradecimiento al señor Gabriel Ayala Blanco por su paciente y muy metódica labor en la parte editorial. También, como en las ediciones anteriores, hago un público reconocimiento a los colegas, alumnos y ex-alumnos y a la comunidad de ingenieros procedentes de todos los rincones del país, cuyas sugerencias recibidas sobre la ediciones anteriores y las anunciadas en las presentaciones efectuadas con motivo de la actualización del Título C – Concreto Estructural – del Reglamento colombiano, fueron especialmente útiles para llevar a feliz término el presente trabajo.

Jorge Ignacio Segura Franco

Capítulo 1

MATERIALES

CONCRETO, REFUERZO Y CONCRETO REFORZADO

DEFINICIONES

Concreto

Material estructural que se forma por medio de la mezcla homogénea de los agregados inertes finos o arena, agregados gruesos o grava, un ligante que es el cemento hidráulico y agua, con o sin aditivos.

Concreto liviano

Concreto con agregado fino y grueso de peso liviano y que cumple con lo especificado en NTC 4045 (ASTM C330).

Acero de refuerzo para el concreto

Acero en barras corrugadas que cumplen con la norma NTC 2289 (ASTM A706M), barras de acero inoxidable fabricadas bajo la norma ASTM A955M siempre y cuando que cumplan con la norma NTC 2289 (ASTM A706M), refuerzo en barras lisas de acuerdo a la norma NTC 161 (ASTM A615M) permitido sólo para estribos, refuerzo de retracción y temperatura o refuerzo en espiral y cuando conforma mallas electrosoldadas, alambre de refuerzo electrosoldado liso que debe cumplir la norma NTC 1925 (ASTM A185M), alambre de refuerzo electrosoldado corrugado de acuerdo a la norma NTC 2310 (ASTM A497M). El acero de refuerzo se coloca en el concreto para absorber esfuerzos de tracción, de compresión de cortante y de torsión. Para cortante también se pueden utilizar los pernos con cabeza y deben cumplir la norma ASTM A1044M y las fibras de acero deformadas dispersas y deben cumplir NTC 5214 (ASTM A820M).

Concreto reforzado

Concreto al cual se le ha adicionado un refuerzo de acero en barras, mallas electrosoldadas, pernos con cabeza y fibras de acero deformadas dispersas para absorber los esfuerzos que el concreto por su propia condición no lo

puede hacer, pero entendiéndose que el trabajo de los dos materiales es de conjunto, es decir, a partir de la compatibilidad de deformaciones de los dos materiales.

CARACTERISTICAS DE LOS MATERIALES

Enunciamos las principales características de uso inmediato en el diseño de elementos estructurales de concreto reforzado:

CONCRETO:

-Resistencia especificada del concreto a la compresión:(f´c): Define la calidad del material y corresponde a la resistencia a la compresión en MPa que se utiliza en el diseño de los elementos estructurales y se determina como el promedio de las resistencias de al menos dos probetas de 150 por 300 mm o de al menos tres probetas de 100 por 200 mm, preparadas de la misma muestra de concreto y ensayadas a 28 días o a la edad de ensayo establecida.

Según el Reglamento Colombiano NSR-10, para el concreto estructural f'_c no debe ser inferior a 17 MPA.

En la figura 1.1, presentamos curvas típicas esfuerzo-deformación unitaria a la compresión para concretos de f'_c = 35.2 MPa (352 kgf/cm^2 o 5000 psi), 28.1 MPa (281 kgf/cm^2 o 4000 psi) y 21.1 MPa (211 kgf/cm^2 o 3000 psi); se llama la atención del lector sobre la parte inicial de las mismas aproximadas a unas rectas en las que se puede concluir la proporcionalidad entre las deformaciones y los esfuerzos que las producen. Por esta razón, esta primera parte también se denomina porción elástica de la curva.

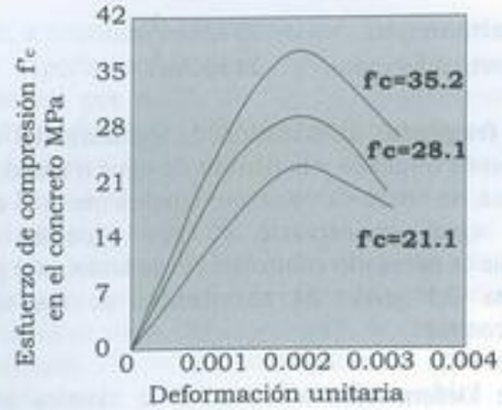


Figura1.1

-Resistencia a la tracción: Su valor es poco determinado y depende del tipo de ensayo con el cual se trabaja y del tipo de agregados utilizados. En cuanto a los tipos de ensayos, existen ensayos de tensión directa, de tensión indirecta y también se puede determinar en términos del módulo de rotura fr. La resistencia a la tracción es de especial importancia en la resistencia del concreto al cortante, torsión y otras acciones.

-Coeficiente de dilatación térmica: Los efectos de los cambios de temperatura (expansión y contracción) en el volumen del concreto son muy similares a los del acero de refuerzo y se pueden tomar aproximadamente como:

$\alpha = 0.00001$ por un grado centígrado

Por tanto, para el cálculo de las deformaciones por cambios de temperatura puede considerarse aproximadamente 0.01 mm por metro y por grado centígrado.

-Peso: variable según las proporciones de la mezcla y la calidad de los agregados. De acuerdo al Reglamento NSR-10 (Sección B.3.2) se pueden tomar los siguientes valores:

Concreto simple: 23 kN/m^3
Concreto reforzado: 24 kN/m^3

-Retracción de fraguado: disminución de volumen del concreto por la acción del proceso de fraguado y la pérdida de agua o secado. A medida que el concreto se seca, se retrae en volumen. Igualmente si el concreto seco se sumerge en el agua, se expande y estos procesos pueden causar agrietamientos que es necesario controlar. Por lo tanto, este proceso depende en alguna forma del grado de absorbencia de los agregados y su correspondiente control.

-Fluencia lenta: Deformación adicional a la elástica adquirida por el concreto sometido a carga permanente y de la cual no se recupera.

-Modulo de elasticidad o Flujo Plástico (Creep): Corresponde a la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria que este produce y es la pendiente del tramo recto inicial de la curva esfuerzo-deformación unitaria y aumenta con la resistencia del concreto. Según el Reglamento NSR-10 (Artículo C.8.5.1), el módulo de elasticidad, E_c, para el concreto puede tomarse como $w_c^{1.5} * 0.043\sqrt{f'_c}$ (en MPa) para valores de w_c comprendidos entre 1440 y 2560 kg/m^3. Para concretos de densidad normal, E_c puede tomarse como $4700\sqrt{f'_c}$

Por considerarlo de importancia para el lector, transcribimos el artículo CR8.5.1 del Reglamento NSR-10. "Los estudios que condujeron a la expresión que tradicionalmente ha contenido para el modulo de elasticidad del concreto el Reglamento ACI 318 en C.8.5.1. se resumen en la Referencia C.8.7 en donde E_c se define como la pendiente de la secante trazada desde un esfuerzo nulo hasta un esfuerzo de compresión de 0.45 f'_c. El modulo de elasticidad del concreto es sensible al modulo de elasticidad del agregado y puede diferir del valor especificado. Los valores medidos varían típicamente de 120 a 80 por ciento del valor especificado. La Norma NTC 4025 (ASTM C469[C.8.8]) se describen métodos para la determinación del modulo de elasticidad del concreto. Allí se indica, además como medir el Módulo de Poisson. En caso de que no se disponga de un valor experimental el módulo de Poisson puede tomarse como 0.20.

A modo de guía, a continuación se presentan los resultados de una serie de investigaciones experimentales nacionales realizadas en la Universidad Javeriana de Bogotá por medio de las cuales se lograron correlaciones estadísticas del modulo de elasticidad del concreto E_c. En estas investigaciones se aplico el sesgo necesario para tener en cuenta que en las ecuaciones para obtener el módulo se introduce el valor nominal de f'_c de acuerdo con las resistencia de diseño y el concreto en la estructura en realidad tendrá una resistencia mayor. El sesgo se obtuvo de la misma población usada para calcular el modulo de elasticidad del concreto utilizando la estadística de la diferencia entre la resistencia nominal y real del concreto ensayado. El trabajo investigativo de aplicación del sesgo lo realizó una estudiante de postgrado de la Universidad de los Andes de Bogotá.

En caso de que no se disponga de este valor experimental, para concretos cuya masa unitaria varié entre 1440 y 2460 kg/m^3, puede tomarse como:

Para agregado grueso de origen ígneo:

$$E_c = w_c^{1.5} * 0.047\sqrt{f'_c} \quad \text{en MPa}$$

Para agregado grueso de origen metamórfico:

$$E_c = w_c^{1.5} * 0.041\sqrt{f'_c} \quad \text{en MPa}$$

Para agregado grueso de origen sedimentario:

$$E_c = w_c^{1.5} * 0.031\sqrt{f'_c} \quad \text{en MPa}$$

El valor medio para toda la información experimental nacional, sin distinguir por tipo de agregado, es :

$$E_c = w_c^{1.5} * 0.034\sqrt{f'_c} \quad \text{en MPa}$$

Cuando no se disponga del valor de la masa unitaria del concreto, puede utilizarse:

Para agregado grueso de origen ígneo:

$E_c = 5500\sqrt{f'_c}$ en MPa

Para agregado grueso de origen metamórfico:

$E_c = 4700\sqrt{f'_c}$ en MPa

Para agregado grueso de origen sedimentario:

$E_c = 3600\sqrt{f'_c}$ en MPa

El valor medio para toda la información experimental nacional, sin distinguir por tipo de agregado, es:

$E_c = 3900\sqrt{f'_c}$ en MPa"

ACERO DE REFUERZO PARA EL CONCRETO:

-Resistencia nominal a la fluencia (punto de fluencia) del acero de refuerzo (f_y)**:** Define la calidad del material y corresponde a la resistencia a los esfuerzos de tracción y compresión en MPa en el límite o punto de fluencia f_y y que se utiliza en el diseño de los elementos estructurales. En la figura 1.2 se presentan curvas típicas tracción-deformación para aceros de f_y = 240 MPa (2400 kgf/cm² o 34000 psi), 350 MPa (3500 kgf/cm² o 50000 psi) y 420 MPa (4200 kgf/cm² o 60000 psi) que corresponden a una clasificación muy general de aceros de baja, mediana y alta resistencia, respectivamente.

Se destaca que estos esfuerzos de tracción y de compresión en el límite expresado son generalmente iguales.

-Módulo de elasticidad: Corresponde a la relación entre el esfuerzo de tracción o de compresión y la deformación unitaria que este produce. Según el Reglamento NSR-10, el módulo de elasticidad, Es, para el acero de refuerzo no preesforzado puede tomarse como:

E_s = 200000 MPa

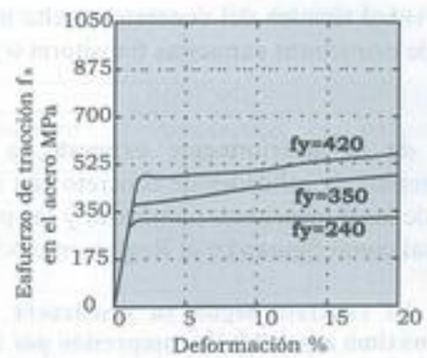


Figura 1.2

-Resistencia a la Fatiga: Para elementos estructurales de concreto reforzado sometidos a una importante repetición de ciclos de esfuerzos se presenta el fenómeno de la fatiga. La fatiga de metales se manifiesta en fisuras microscópicas, usualmente en los puntos de concentración de esfuerzos o en zonas de discontinuidades y puede producir falla súbita o frágil.

CONCRETO REFORZADO:

A continuación se enuncian aquellas características de los materiales que convierten la combinación concreto y acero de refuerzo en un eficiente material estructural:

- La notable resistencia a la compresión del concreto y a la tracción del acero hacen posible combinarlos dentro de la sección estructural en forma tal que los dos materiales se utilizan de una manera óptima.

- La relativa similitud de los coeficientes de dilatación térmica de ambos materiales permite su combinación para ser sometida a deformaciones por cambios de temperatura normales para estructuras.

- El concreto actúa como protector del acero cuya resistencia a la corrosión es muy baja.

- La baja conductividad térmica del concreto resulta útil protegiendo al acero en el caso de estructuras expuestas transitoria o permanentemente al fuego.

Como complemento de lo anteriormente expuesto, a continuación se presentan algunos ejemplos de calidades de concreto con sus características y un listado resumen de las dimensiones nominales y los pesos de las barras de acero de refuerzo, tal como figuran en el Reglamento NSR-10.

Tabla 1.1 Calidades del concreto según su resistencia especificada a la compresión, esfuerzo máximo admisible de compresión por flexión, módulo de elasticidad según el Reglamento NSR-10 y la relación de los módulos de elasticidad acero/concreto:

Resistencia especificada a la compresión f'_c		Esfuerzo máximo admisible de compresión por flexión: $f_c = 0.45\, f'_c$	Módulo de elasticidad $E_c = 4700\sqrt{f'_c}$ MPa Valor medio según experimentación nacional	$n = E_s / E_c$
MPa	p.s.i.	Mpa	MPa	
14.1	2000	6.3	17600	11.4
17.6	2500	7.9	19700	10.2
21.1	3000	9.5	21600	9.3
24.6	3500	11.1	23300	8.6
28.1	4000	12.6	24900	8.0
31.6	4500	14.2	26400	7.6
35.2	5000	15.8	27800	7.2

Tabla 1.2 Dimensiones nominales de las barras de refuerzo, con diámetros basados en milímetros.

Designación de la barra No	DIMENSIONES NOMINALES			
	Diámetro mm	Area sección mm^2	Perímetro mm	Masa kg/m
6M	6.0	28.3	18.85	0.222
8M	8.0	50.3	25.14	0.394
10M	10.0	78.5	31.42	0.616
12M	12.0	113.1	37.70	0.887
16M	16.0	201.1	50.27	1.577
18M	18.0	254.5	56.55	1.996
20M	20.0	314.2	62.83	2.465
22M	22.0	380.1	69.12	2.982
25M	25.0	490.9	78.54	3.851
32M	32.0	804.2	100.53	6.309
45M	45.0	1590.4	141.37	12.477
55M	55.0	2375.8	172.79	18.638

Tabla 1.3 Dimensiones nominales de las barras de refuerzo, con diámetros basados en octavos de pulgada.

Designación de la barra No	Diámetro de referencia en pulgadas	DIMENSIONES NOMINALES			
		Diámetro mm	Area sección mm^2	Perímetro mm	Masa kg/m
2	1/4	6.4	32	20.0	0.250
3	3/8	9.5	71	30.0	0.560
4	1/2	12.7	129	40.0	0.994
5	5/8	15.9	199	50.0	1.552
6	3/4	19.1	284	60.0	2.235
7	7/8	22.2	387	70.0	3.042
8	1	25.4	510	80.0	3.973
9	1-1/8	28.7	645	90.0	5.060
10	1-1/4	32.3	819	101.3	6.404
11	1-3/8	35.8	1006	112.5	7.907
14	1-3/4	43.0	1452	135.1	11.380
18	2-1/4	57.3	2581	180.1	20.240

Tabla 1.4 Alambre de refuerzo estándar de la ASTM.

Tamaño MW y MD		Diámetro nominal mm	Masa nominal kg/m	As – mm2 por metro Espaciamiento centro a centro, mm						
Liso	Corrugado			50	75	100	150	200	250	300
MW 290	MD 290	19.22	2.27	5800	3900	2900	1900	1450	1160	970
MW 200	MD 200	15.95	1.5700	4000	2700	2000	1300	1000	800	670
MW 130	MD 130	12.90	1.0204	2600	1700	1300	870	650	520	430
MW 120	MD 120	12.40	0.9419	2400	1600	1200	800	600	480	400
MW 100	MD 100	11.30	0.7849	2000	1300	1000	670	500	400	330
MW 90	MD 90	10.70	0.7064	1800	1200	900	600	450	360	300
MW 80	MD 80	10.10	0.6279	1600	1100	800	530	400	320	270
MW 70	MD 70	9.40	0.5494	1400	930	700	470	350	280	230
MW 65	MD 65	9.10	0.5102	1300	870	650	430	325	260	220
MW 60	MD 60	8.70	0.4709	1200	800	600	400	300	240	200
MW 55	MD 55	8.40	0.4317	1100	730	550	370	275	220	180
MW 50	MD 50	8.00	0.3925	1000	670	500	330	250	200	170
MW 45	MD 45	7.60	0.3532	900	600	450	300	225	180	150
MW 40	MD 40	7.10	0.3140	800	530	400	270	200	160	130
MW 35	MD 35	6.70	0.2747	700	470	350	230	175	140	120
MW 30	MD 30	6.20	0.2355	600	400	300	200	150	120	100
MW 25	MD 25	5.60	0.1962	500	330	250	170	125	100	83
MW 20		5.00	0.1570	400	270	200	130	100	80	67
MW 15		4.40	0.1177	300	200	150	100	75	60	50
MW 10		3.60	0.0785	200	130	100	70	50	40	33
MW 5		2.50	0.0392	100	67	50	33	25	20	17

Capítulo 2

FLEXION

FLEXION

Este capítulo estudia la flexión para las vigas de concreto reforzado mediante dos procedimientos que trataremos en su orden. Inicialmente el procedimiento de diseño a la flexión por el método de los esfuerzos admisibles, esfuerzos de trabajo o método elástico, y posteriormente el denominado método de resistencia o de la resistencia última.

METODO DE LOS ESFUERZOS ADMISIBLES O METODO ELASTICO

Se presenta el Método de los Esfuerzos Admisibles o Método Elástico por las siguientes razones, principalmente:

1. Los Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-08), que es el documento base para la elaboración del Titulo C – Concreto Estructural – del Reglamento Colombiano de Diseño y Construcción Sismo Resistentes (NSR-10), incluye, en el comentario R1.1, la posibilidad de usar este método en lugar de las secciones que correspondan en ese Reglamento.
2. El Reglamento NSR-10 en el comentario CR1.1 también acepta su utilización como un Método Alternativo de Diseño para elementos de concreto no pre-esforzados empleando cargas de servicio y esfuerzos admisibles de servicio y sus requisitos se encuentran en el Titulo C, Apéndice C-G.
3. Un número importante de estructuras se han diseñado y seguirán diseñando con este método, por lo que se considera indispensable su conocimiento por parte del profesional en ejercicio.
4. Su estudio es de especial importancia en la formación académica de los estudiantes de esta área.

Existen dos hipótesis fundamentales en la teoría elástica y por consiguiente en su aplicación a la viga de concreto:

- La sección de una viga sometida a flexión es plana antes y después de cargada o deformada. Se concluye entonces que las deformaciones de las fibras son proporcionales a su distancia al eje neutro.

- Las deformaciones de las fibras son proporcionales a los esfuerzos que las deforman con una constante de proporcionalidad que es el módulo de elasticidad (Ley de Hooke).

La aplicación de estas hipótesis para una sección rectangular (b x h) homogénea y elástica en equilibrio implicaría diagramas de deformaciones y esfuerzos según esquemas adjuntos:

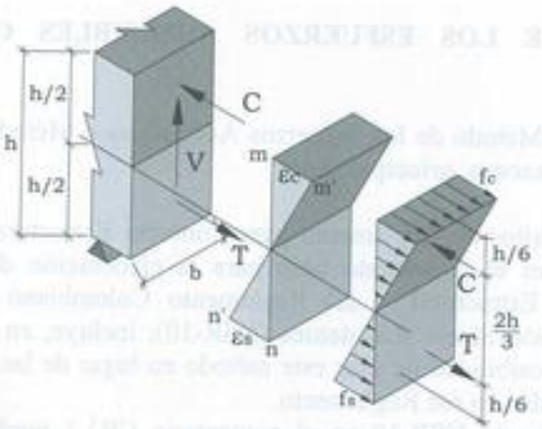


Figura 2.1

El momento interior resistente, igual al exterior actuante, será:

$$M = C * \frac{2}{3}h = T * \frac{2}{3}h$$

en donde $C = T = \frac{1}{2} * fb * \frac{h}{2} = \frac{1}{4}fbh$

$\therefore \quad M = \frac{1}{4}fbh * \frac{2}{3}h = \frac{1}{6}fbh^2$, expresión esta similar a la obtenida en la aplicación de la fórmula de la flexión:

$$f = \frac{Mc}{I} \quad \therefore \quad M = \frac{f * \frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6}fbh^2$$

que permite diseñar (obtener b x h) en una sección homogénea y elástica a partir del momento actuante M, si se conoce el esfuerzo admisible o de trabajo f.

Al aplicar la teoría anterior a una viga de sólo concreto cargándola gradualmente, muy pronto se encuentra con el agrietamiento del concreto a tracción, lo cual obliga a reemplazarlo en el diagrama de esfuerzos por un refuerzo metálico en una proporción tal que su trabajo corresponda a esfuerzos y deformaciones admisibles. Por otra parte, aunque las deformaciones del concreto a la compresión no son proporcionales a las cargas que las producen, para un rango de esfuerzos pequeños la curva esfuerzos-deformaciones se acerca a la recta y puede aceptarse la ley de variación lineal de los esfuerzos. De esta manera se tiene entonces el denominado método de diseño elástico, método de los esfuerzos de trabajo o de los esfuerzos admisibles.

Al variar la proporción del acero en la sección se generan las siguientes clases de diseño dentro del citado método elástico:

Diseño balanceado

Los materiales se han proporcionado de tal forma que los esfuerzos obtenidos para ambos, concreto y refuerzo, son los de trabajo.

Diseño sobre reforzado

La proporción del refuerzo es excesiva en la sección, de tal manera que si se llevara a la falla, esta se iniciaría en el concreto (falla súbita).

Diseño sub-reforzado

La proporción del refuerzo es escasa en la sección, de tal manera que si se llevara a la falla, esta se iniciaría en el acero (falla lenta).

Diseño óptimo

Es un diseño sub-reforzado en donde la proporción final en los materiales obedece a un estudio de costos.

VIGAS RECTANGULARES CON ARMADURA A TRACCION

Se deducirán las principales expresiones utilizables para el diseño de vigas rectangulares con armadura a tracción, según el método elástico, y su forma de tabulación.

A partir del funcionamiento de la sección con sus diagramas de esfuerzos y deformaciones según la figura:

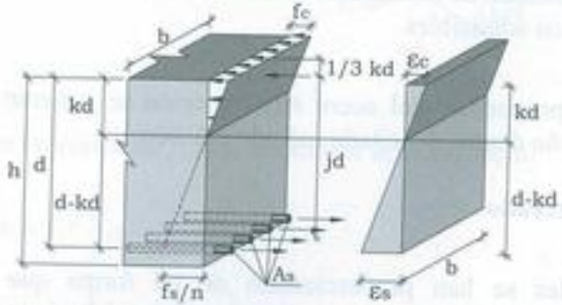


Figura 2.2

en donde se denomina:

d = altura efectiva: distancia de la fibra más comprimida al centro de gravedad de las áreas de refuerzo de tracción en secciones sometidas a flexión;

k = constante menor que la unidad que multiplicada por la altura efectiva equivale a la profundidad (kd) del eje neutro;

j = constante menor que la unidad que multiplicada por la altura efectiva equivale al brazo (jd) del par interior resistente;

f_c = esfuerzo máximo admisible o de trabajo del concreto a compresión;

f_s = esfuerzo máximo admisible o de trabajo del acero a tracción.

se obtiene:

a) Del diagrama de deformaciones:

$$\frac{\varepsilon_s}{d-kd} = \frac{\varepsilon_c}{kd} \quad \text{en donde: } \varepsilon_s = \frac{f_s}{E_s}; \quad \varepsilon_c = \frac{f_c}{E_c} \quad \text{y} \quad n = \frac{E_s}{E_c}$$

$$\therefore f_s = nf_c * \frac{1-k}{k} \quad \text{y} \quad f_c = \frac{f_s}{n} * \frac{k}{1-k} \qquad (1)$$

expresiones que relacionan los esfuerzos en los materiales con la profundidad del eje neutro.

Llamando $r = \frac{f_s}{f_c}$ se obtiene:

$$r = n\frac{1-k}{k} \quad \text{y} \quad k = \frac{n}{n+r} \qquad (2)$$

o sea, la profundidad del eje neutro para el caso en que se conocen los esfuerzos a los cuales están trabajando los materiales, como en el caso del diseño balanceado.

b) Del corte longitudinal de la viga:

$$jd = d - \frac{1}{3}kd \qquad \therefore j = 1 - \frac{k}{3} \tag{3}$$

c) A partir de la igualdad C = T:

$$C = \frac{1}{2} f_c kdb = T = A_s f_s = \rho bdf_s \qquad \text{en donde:}$$

$$\rho = \text{ cuantía del refuerzo} = \frac{A_s}{bd} = \frac{\text{Area del refuerzo}}{\text{Area útil}}$$

$$\therefore \rho = \frac{k}{2r} \tag{4}$$

expresión que relaciona la cuantía del refuerzo con la profundidad del eje neutro y los esfuerzos a los cuales estarán trabajando los materiales así proporcionados en la sección.

d) De (1) y (4) se obtiene:

$$\rho = \frac{kf_c}{2f_s} = \frac{k^2}{2n(1-k)} \qquad \therefore \quad k^2 + 2n\rho k - 2n\rho = 0$$

Expresando la profundidad del eje neutro en función de la cantidad de refuerzo en la sección se tiene:

$$k = -n\rho + \sqrt{(n\rho)^2 + 2n\rho} \tag{5}$$

e) Finalmente, a partir de Momento exterior actuante = Momento interior resistente, se plantea:

$$M = Tjd = Cjd$$

Para el primer caso: $M = A_s f_s jd$, de donde:

$$A_s = \frac{M}{f_s jd} \tag{6}$$

Para el segundo caso: $M = (1/2) * f_c kjbd^2$ en donde si se reemplaza f_c y j en función de k y k en función de ρ, se obtiene un programa de diseño con ρ en función del momento M.

Por otra parte, llamando $K = (1/2) * f_c kj$, resulta una expresión tabulable en K de utilidad para el diseño por esta modalidad:

$$M = Kbd^2 \tag{7}$$

De aquí se puede obtener: $d = \frac{1}{\sqrt{K}}\sqrt{\frac{M}{b}}$ en donde si $k2 = \frac{1}{\sqrt{K}}$ entonces:

$$d = k2\sqrt{\frac{M}{b}} \tag{8}$$

En el proceso de tabulación antes mencionado se procede a partir de ρ calculando

$$k = -n\rho + \sqrt{(n\rho)^2 + 2n\rho}\,, \quad j = 1 - \frac{k}{3}\,, \quad f_c = \frac{f_s}{n} * \frac{k}{1-k}\,, \quad K = \frac{1}{2} f_c kj \text{ y } k2 = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

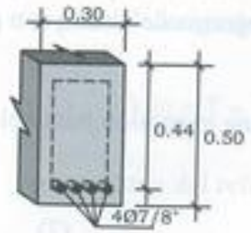
Una muestra de las tablas así obtenidas se encuentra anexa en el Apéndice 1.A del presente texto.

A continuación se aplicarán las fórmulas antes deducidas en problemas de diseño y revisión de secciones rectangulares de concreto reforzado con armadura a tracción, empezando por los de revisión en atención a consideraciones didácticas.

Problema 2.1

Revisar el diseño a flexión para momento máximo en el centro de la luz de 8 metros de una viga simplemente apoyada sometida a carga

uniforme, determinando el momento resistente, la carga w en kN/m que puede soportar en condiciones de seguridad y los esfuerzos a que estarán trabajando los materiales, de acuerdo a la sección y datos adjuntos:



Concreto : f'_c = 21.1 MPa
Refuerzo : f_y = 120 MPa
n = 9.3

Figura 2.3

Nota: Para la distribución del refuerzo en la sección, se deben tener en cuenta las siguientes recomendaciones del Reglamento NSR-10 sobre recubrimiento de las armaduras y separación libre entre barras:

1) Armadura principal, estribos y espirales 40 mm

2) La separación libre entre las barras paralelas colocadas en una fila o capa no debe ser menor que el diámetro d_b de la barra, ni menor de 25 mm, ni menor de 1.33 veces el tamaño del agregado grueso. (véanse secciones C.7.6 y C.7.7 y su complemento en C.3.3.2 del Reglamento NSR-10).

Solución

Se trata de obtener los momentos resistentes por acero y por concreto de la sección, determinar el admisible y a partir de este, la carga w en kN/m y los esfuerzos en los materiales, así:

1) Momentos resistentes por acero y concreto, M_s y M_c, y momento resistente de la sección.

Para calcular estos momentos se debe conocer antes k y j a partir de ρ:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{4*0.000387}{0.30*0.44} = 0.011727$$

$$k = -n\rho + \sqrt{(n\rho)^2 + 2n\rho}$$

$$k = -9.3*0.011727 + \sqrt{(9.3*0.011727)^2 + 2*9.3*0.011727}$$

$$k = 0.370538$$

∴ kd (profundidad del eje neutro) = 0.163 m

$$j = 1 - \frac{k}{3} = 1 - \frac{0.370538}{3} = 0.876487$$

∴ jd (brazo del par interior resistente) = 0.386 m

Ahora:

Momento resistente admisible, en unidades de kN·m, según el acero de refuerzo a la tracción, M_s:

$$M_s = T * jd = A_s f_s * jd = 4*0.000387*120000*0.876487*0.44$$
$$= 71.64 \text{ kN·m}$$

Momento resistente admisible, también en unidades de kN·m, según el concreto a la compresión, M_c:

$$M_c = C * jd = \frac{1}{2} f_c kjbd^2 = \frac{1}{2} * 9500 * 0.370538 * 0.876487 * 0.30 * 0.44^2$$
$$M_c = 89.60 \text{kN.m}$$

El momento resistente de la sección será el menor de los dos calculados, esto es, el momento resistente admisible según el acero de refuerzo a la tracción: $M_s = 71.64$ kN·m (diseño sub-reforzado).

La conclusión sobre el diseño como sub-reforzado se hubiera podido tener con anterioridad evitándonos el cálculo de M_c al comparar la ρ actual con la ρ balanceada:

$$\rho_{balanceada} = \frac{k}{2r} \text{ en donde, } \quad k = \frac{n}{n+r} = \frac{9.3}{9.3 + \frac{120}{9.5}} = 0.4241$$

$$\rho_{balanceada} = \frac{0.4241}{2 * \frac{120}{9.5}} = 0.016789 > \rho_{actual} = 0.011727$$

2) Carga a soportar en condiciones de seguridad:

$$M_{actuante} = M_{resistente}$$

$$\frac{w\ell^2}{8} = \frac{w * 8^2}{8} = 71.64 \text{ kN·m} \therefore w = 8.96 \text{ kN/m}$$

w exterior actuante = w total – peso propio de la viga:
w exterior actuante = 8.96 – 0.30*0.50*1.00*24 = 5.36 kN/m

La carga exterior a la viga que puede soportar en condiciones de seguridad resulta de 5.36 kN/m.

3) Esfuerzos de trabajo de los materiales:

f_s: para el momento resistente adoptado, que es el del acero de refuerzo trabajando a su esfuerzo admisible a la tracción, el valor de f_s será de 120 MPa.

f_c: se puede calcular a partir del momento resistente adoptado, el cual se iguala a M_c:

$$f_c = 9.5 * \frac{71.64}{89.60} = 7.60 \text{ MPa}$$

A manera de comprobación, también se puede usar la expresión:

$$f_c = \frac{f_s}{n} * \frac{k}{1-k} = \frac{120}{9.3} * \frac{0.370538}{1-0.370538} = 7.60 \text{ MPa}$$

f_c resulta inferior a f_c admisible ratificando que el diseño es sub-reforzado.

4) Solución por tablas:

A partir de $\rho = 0.011727$, se obtienen de las tablas respectivas por interpolación lineal los valores de K y f_c :

$K = 1233.1$ y $f_c = 7.59$ MPa

$$M_{resistente} = Kbd^2 = 1233.1 * 0.30 * 0.44^2 = 71.62 \text{ kN·m}$$

El valor de f_s será igual al admisible o 120 MPa, puesto que el diseño es sub-reforzado.

La carga a soportar en condiciones de seguridad se calcula en la misma forma del punto 2.

Problema 2.2

Revisar el diseño a flexión para momento máximo en el centro de la luz de 8 metros de una viga simplemente apoyada sometida a carga uniforme determinando el momento resistente, la carga w en kN/m que puede soportar

en condiciones de seguridad y los esfuerzos a que estarán trabajando los materiales, de acuerdo a la sección y datos adjuntos:

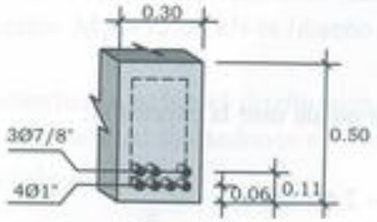


Figura 2.4

Concreto: $f'_c = 21.1$ MPa

Refuerzo: $f_s = 120$ MPa

$n = 9.3$

Nota: Para la distribución del refuerzo en la sección en más de una fila, se debe tener en cuenta la siguiente recomendación del Reglamento NSR-10, Sección C.7.6.2:

"Cuando el refuerzo paralelo se coloque en dos o más capas, las barras de las capas superiores deben colocarse exactamente sobre las de las capas inferiores, con una distancia libre entre capas no menor de 25 mm."

Solución

Se trata, como en el problema anterior, de obtener el momento resistente admisible de la sección, la carga w en kN/m y los esfuerzos en los materiales.

1) Momento resistente de la sección:

Se calcula inicialmente ρ:

$\rho = \frac{A_s}{bd}$; se obtiene d = h - y en donde y es la distancia del centroide de las áreas de las barras al borde inferior de la viga.

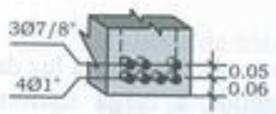


Figura 2.5

$$y = \frac{4*510*60 + 3*387*110}{4*510 + 3*387} = 78.1 \text{ mm}$$

$$d = 500 - 78.1 \text{ mm} = 421.9 \text{ mm}$$

$\rho = \frac{3201}{300*421.9} = 0.025290$, cuantía superior a la balanceada (ρ bal = 0.016789); por lo tanto se trata de un diseño sobre reforzado.

Se calcula entonces k:

$$k = -n\rho + \sqrt{(n\rho)^2 + 2n\rho} = -9.3*0.025290 + \sqrt{(9.3*0.025290)^2 + 2*9.3*0.025290}$$

$k = 0.489863$

$\therefore kd = 206.7$ mm

y j a partir de k: $j = 1 - \frac{k}{3} = 1 - \frac{0.489863}{3} = 0.836712$ $\therefore jd = 353.0$ mm

Finalmente, el momento resistente admisible de la sección estará dado por el concreto a la compresión:

$$M_c = Cjd = \frac{1}{2} f_c kjbd^2 = \frac{1}{2} * 9500 * 0.489863 * 0.836712 * 0.300 * 0.4219^2$$

$M_c = 103.96$ kN·m

2) Carga a soportar en condiciones de seguridad:

$$M_{actuante} = M_{resistente}$$

$$\frac{w\ell^2}{8} = \frac{w*8^2}{8} = 103.96 \quad \therefore w = 12.99 \text{kN/m}$$

w exterior actuante = w total – peso propio de la viga

w exterior actuante = 12.99 – 0.30*0.50*1.00*24 =9.39 kN/m

Nota: Se debe advertir que no obstante que la armadura existente es aproximadamente el doble de la correspondiente al problema anterior, la carga no es proporcional a este aumento.

3) Esfuerzos de trabajo de los materiales:

f_c : Para el momento resistente adoptado, que es el del concreto trabajando a su esfuerzo admisible de compresión, el valor de f_c será de 9.5 MPa.

f_s : A partir de la expresión: $f_s = nf_c * \frac{1-k}{k}$ se obtiene:

$f_s = 9.3 * 9.5 * \frac{1-0.489863}{0.489863} = 92.01$ MPa < f_s admisible por ser un diseño sobre reforzado.

Problema 2.3

Revisar el diseño a flexión para momento máximo en el centro de la luz de 8 metros de una viga simplemente apoyada sometida a carga uniforme, determinando el momento resistente, la carga w en kN/m que puede resistir en condiciones de seguridad y los esfuerzos a que estarán trabajando los materiales, de acuerdo a la sección y datos adjuntos.

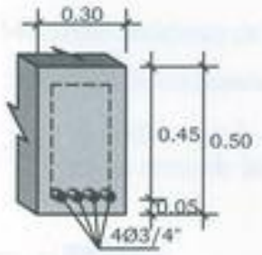


Figura 2.6

Concreto: $f'_c = 21.1$ MPa
Refuerzo: $f_s = 170$ MPa
$n = 9.3$

Solución
Se trata, como en los casos anteriores, de obtener el momento resistente admisible de la sección, cotejándolo con el correspondiente al problema 2.1 y determinar también la carga w en kN por metro y los esfuerzos en los materiales.

1) Momento resistente de la sección:

Se tiene: $\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{4*284}{300*450} = 0.008415$

Como ejemplo de utilización de las tablas, por interpolación lineal se obtiene:

$K = 1275.2$
$f_c = 8.80$ MPa

Por tanto:

$M = Kbd^2 = 1275.2*0.30*0.45^2 = 77.47$ kN·m

De la comparación de los momentos resistentes de los problemas 2.1 y 2.3, ambos obtenidos para el acero de refuerzo a la tracción, dentro del período del sub refuerzo, se puede concluir que se ha compensado la disminución en la armadura con un aumento en el esfuerzo de la misma para lograr una tracción semejante, que con brazos del par interior resistente parecidos permita obtener resultados equiparables; esta aplicación será útil en el caso de dificultades en la acomodación del refuerzo en una sección inmodificable.

Por otra parte, es evidente que para este diseño sub-reforzado el valor de f_s será el admisible o sea 170 MPa y el f_c obtenido de las tablas, de 8.79 MPa, resulta inferior al f_c admisible.

2) Carga a soportar en condiciones de seguridad:

$$\frac{w\ell^2}{8}=\frac{w*8^2}{8}=77.47\ \text{kN·m} \quad \therefore \quad w=9.68\ \text{kN/m}$$

w exterior actuante = w total – peso propio de la viga

w exterior actuante = 9.68 – 0.30*0.50*1.00*24 = 6.08 kN/m

Los siguientes son problemas de diseño de secciones rectangulares de concreto reforzado con armadura a la tracción.

Problema 2.4

Diseñar la armadura necesaria a flexión en una viga de 0.30 x 0.50 m, simplemente apoyada en una luz de 8 metros, armada con concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero para f_s = 120 MPa, n = 9.3 y las siguientes condiciones de carga:

a) Carga uniforme total (incluyendo el peso propio): w = 10 kN/m

$$\text{Momento actuante} = \frac{w\ell^2}{8}=\frac{10*8^2}{8}=80\ \text{kN·m}$$

A partir de este momento actuante, se puede utilizar la fórmula-programa de diseño (véase comienzo del capítulo) y directamente obtener la cuantía ρ o utilizar las tablas así:

$$\text{Momento actuante} = M = Kbd^2 \quad \therefore \quad K=\frac{M}{bd^2}=\frac{80}{0.30*0.44^2}=1377.4$$

Para este valor de K se interpola el valor de ρ = 0.013188

Armadura: $A_s = \rho bd = 0.013188*300*440 = 1741\ \text{mm}^2$

Refuerzo: 2 ϕ 1" + 2 ϕ 7/8" (A_s = 1794 mm² - siempre por exceso)

b) Carga uniforme total w = 3.6 kN/m adicionada a una carga concentrada P = 25.6 kN aplicada en el centro de la luz.

$$\text{Momento actuante} = \frac{w\ell^2}{8}+\frac{P\ell}{4}=\frac{3.6*8^2}{8}+\frac{25.6*8}{4}=80\ \text{kN·m}$$

Para momentos actuantes y resistentes iguales, la armadura será también, como en "a": 2 ϕ 1" + 2 ϕ 7/8".

Problema 2.5

Con base en el problema anterior, obtener el diseño balanceado, suponiendo w en kN/m constante y las siguientes condiciones adicionales:

a) Ancho de la viga "b" invariable e igual a 0.30 m
b) Altura útil "d" invariable e igual a 0.44 m

Solución

a) Si se mantiene el momento actuante no obstante el posible cambio de la sección, se determina la altura efectiva "d" correspondiente a un diseño balanceado utilizando el valor de k2 respectivo que se puede calcular u obtener de la tabla correspondiente. Se procede así:

$k2=\frac{1}{\sqrt{K}}$ en donde $K = \frac{1}{2}*f_c\ k\ j$ (f_c en kN/m²). Para diseño balanceado

se reemplaza:

$$k=\frac{n}{n+r}=\frac{9.3}{9.3+\frac{120}{9.5}}=0.4241 \quad \text{y} \quad j=1-\frac{k}{3}=1-\frac{0.4241}{3}=0.8586$$

$$\therefore \quad K=\frac{1}{2}*9500*0.4241*0.8586=1729.6$$

$$\therefore \quad k2=\frac{1}{\sqrt{1729.6}}=0.0240$$

También de las tablas se obtiene k2 = 0.0240 y conocido el momento

actuante = 80kN·m se calcula $d = k2\sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0240 * \sqrt{\frac{80}{0.30}} = 0.392$ m

El valor para "d" también se puede obtener a partir de la formula de diseño:

$$M = \tfrac{1}{2} * f_c kjbd^2 = 1729.6 * 0.30 * d^2 = 80 \qquad \therefore \quad d = 0.392 m$$

Por lo tanto:

$$\therefore \quad A_s = 0.016789 * 300 * 392 = 1974 \text{ mm}^2$$

Refuerzo: $2\phi 1\,\tfrac{1}{8}" + 1\phi 1\,\tfrac{1}{4}" \ (A_s = 2109 \text{mm}^2)$

Concreto: b = 0.30 m; h = 0.452 m

Esta solución implica diversas alturas según los momentos actuantes y resulta impracticable con la variedad de momentos existentes en una viga y con mayor razón en el caso en que esta haga parte del sistema de vigas de una estructura.

b) Altura útil "d" invariable e igual a 0.44 m.

En forma semejante al caso anterior:

$$d = k2\sqrt{\frac{M}{b}} \qquad \therefore \quad b = \frac{k2^2 * M}{d^2} = \frac{0.0240^2 * 80}{0.44^2} = 0.238 \text{ m}$$

$$\therefore \quad A_s = 0.016789 * 238 * 440 = 1758 \text{ mm}^2$$

Refuerzo: $2\phi 1\,\tfrac{1}{8}" + 1\phi 1" \ (A_s = 1800 \text{mm}^2)$

Concreto: b = 0.238 m; h = 0.50 m

Lo mismo que en el caso anterior, esta solución con diferentes anchos según los momentos actuantes resulta también impracticable.

Nota: En las anteriores soluciones teóricas del problema se debe destacar la influencia de la altura en la determinación de la cantidad de armadura; así, la

solución "b" es comparable a la original del problema 2.4 con una mejor utilización del concreto en contraposición con una mayor dificultad en la construcción de la viga, omitiendo otras consideraciones.

Problema 2.6

Diseñar la armadura necesaria a flexión en una viga de 0.30 x 0.50 m, simplemente apoyada en una luz de 8 metros, armada en concreto de $f'_c = 21.1$ MPa y acero para $f_s = 170$ MPa, n = 9.3 y una carga uniforme total (incluyendo el peso propio) de w = 10 kN/m. Complementar este diseño obteniendo el balanceado para la condición de w constante.

Solución

a) Diseño para la sección propuesta:

M actuante = 80 kN·m

M resistente = $M = Kbd^2 \qquad \therefore \quad K = \frac{80}{0.30 * 0.44^2} = 1377.4$

Para este valor de K se interpola el valor de $\rho = 0.009127$

Armadura: $A_s = 0.009127 * 300 * 440 = 1205 \text{ mm}^2$

Refuerzo: $1\,\phi\ 7/8" + 3\,\phi\ 3/4"$ ($A_s = 1239 \text{ mm}^2$)

Concreto: b = 0.30 m; h = 0.50 m

Nota: Obsérvese la disminución en el área de refuerzo necesaria con respecto al problema 2.4 cuando se aumenta el esfuerzo admisible a la tracción en el acero al cambiar la calidad del material.

b) Diseño balanceado:

Con la suposición de w constante y el mismo momento actuante, se obtienen d y h para b = 0.30 m:

$$d = k2\sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0264\sqrt{\frac{80}{0.30}} = 0.431 \text{ m}$$

$A_s = 0.009555*300*431 = 1235 \text{ mm}^2$

Refuerzo: $1\phi 7/8" + 3\phi 3/4"$ (A_s = 1239 mm^2) que es igual al refuerzo en "a" donde se colocó con un mayor exceso.

Concreto: b = 0.30 m; h = 0.491 m

Ahora se mantiene la altura útil "d" usada en "a" y se calcula b, con el mismo momento actuante M:

$$b = \frac{k2^2 * M}{d^2} = \frac{0.0264^2 * 80}{0.44^2} = 0.288 \text{ m}$$

A_s : $0.009555*288*440 = 1211 \text{ mm}^2$

Refuerzo: $1\phi 7/8" + 3\phi 3/4"$ (A_s = 1239 mm^2) que también se coloca en exceso en procura de simetría.

Concreto: b = 0.30 m; h = 0.50 m

En el problema 2.5 la solución balanceada implica diversas alturas o anchos según los momentos actuantes y esta circunstancia restringe su utilización al plano puramente teórico.

Continuando con el estudio sobre las secciones de concreto reforzado con armadura a la tracción según el método elástico, exponemos ahora el denominado Método de la Sección Transformada u Homogénea, el cual complementa las expresiones deducidas al comienzo, está muy de acuerdo con la formación académica preliminar sobre el tratamiento de las secciones homogéneas y elásticas y tiene además algunas aplicaciones de utilidad en el estudio de las secciones "T" y similares.

METODO DE LA SECCION TRANSFORMADA U HOMOGENEA

A continuación se deducirán las relaciones correspondientes al método de la sección transformada u homogénea para la solución de los problemas de vigas rectangulares con armadura a tracción.

Se parte de una sección rectangular con armadura a tracción y se requiere obtener una sección o área de concreto teórico que reemplace el refuerzo resistiendo sus esfuerzos, para lograr una sección homogénea o transformada a la cual se le pueda aplicar la fórmula de la flexión:

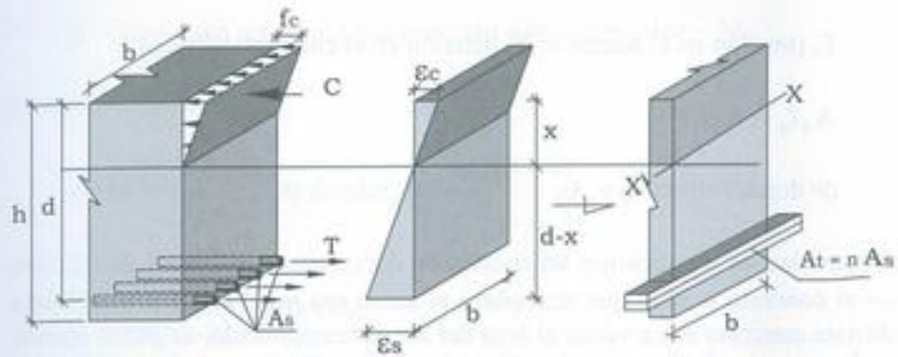


Figura 2.7

$f = \frac{Mc}{I}$, en donde: f = esfuerzo en la fibra considerada

c = distancia de la fibra considerada al eje neutro

I = momento de inercia de la sección homogénea y estáticamente útil con respecto al eje neutro

Lo anterior es posible si en el diagrama de deformaciones se hace que la deformación en el acero reemplazado sea igual a la del concreto teórico que lo reemplaza.

ε_s (deformación en el acero) $=\varepsilon_t$ (deformación en el concreto teórico)

$$\frac{f_s}{E_s}=\frac{f_t}{E_c}$$ (según la ley de Hooke)

de donde: $f_s = nf_t$ (1)

También se debe lograr que la tensión en el acero reemplazado sea igual a la tensión en el concreto teórico que lo reemplaza:

T_s (tensión en el acero) = T_t (tensión en el concreto teórico)

$$A_s f_s = A_t f_t$$

de donde: $nA_s = A_t$ (2)

Cumplidas las condiciones anteriores, es decir, que el esfuerzo de tracción en el concreto teórico que reemplaza al acero sea igual a f_s/n y que el área de este concreto sea n veces el área del acero reemplazado, se puede aplicar a la sección homogénea la fórmula de la flexión, definiéndole con anterioridad la posición del eje neutro y su momento de inercia, así:

Tomando momentos de las áreas estáticamente útiles con respecto a la posible situación del eje neutro, resulta:

$$bx\frac{x}{2}=nA_s(d-x) \quad \therefore \quad \frac{bx^2}{2}-nA_s(d-x)=0$$, ecuación de segundo grado en x, que una vez resuelta permite obtener la profundidad del eje neutro; conocida ésta, se puede calcular el momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I_{x-x}=\frac{bx^3}{3}+I_{A_t}+nA_s(d-x)^2$$

en donde I_{A_t}, momento de inercia de A_t respecto a su centroide, resulta de pequeña magnitud y por ello no se va a tomar en cuenta.

Aplicando la fórmula de la flexión:

$$f_c=\frac{Mx}{I_{x-x}}$$, de donde: $$M_c = f_c\frac{I_{x-x}}{x}$$, en la cual:

f_c = esfuerzo de compresión máximo admisible en la fibra más comprimida.

M = momento resistente por concreto a la compresión = M_c

De la misma forma:

$$f_t=\frac{M(d-x)}{I_{x-x}}$$, de donde: $$f_s=\frac{nM(d-x)}{I_{x-x}}$$; por tanto:

$$M_s=\frac{f_s I_{x-x}}{n(d-x)}$$, en la cual:

f_s = esfuerzo de tracción admisible en el acero

M = momento resistente por acero a la tracción = M_s

Finalmente, a partir del diagrama de esfuerzos en la sección homogénea:

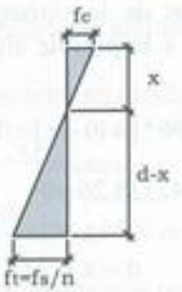


Figura 2.8

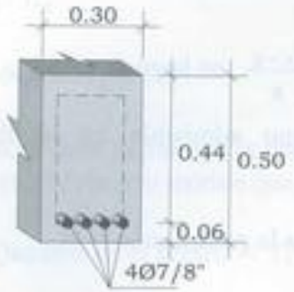
$$f_s = nf_c * \frac{d-x}{x}$$

$$f_c=\frac{f_s}{n} * \frac{x}{d-x}$$

expresiones similares a las obtenidas anteriormente.

Problema 2.7

Resolver el problema 2.1 utilizando el método de la sección transformada u homogénea.



Concreto: f'_c =21.1MPa

Refuerzo: f_s = 120 MPa

n = 9.3

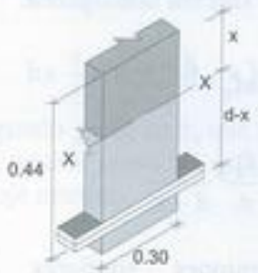
Figura 2.9

Solución

Se obtendrá inicialmente la sección homogénea a la cual se le aplicará la fórmula de la flexión calculando los momentos resistentes por compresión, tracción y el admisible de la sección como requisito para determinar la carga que debe soportar en condiciones de seguridad y, finalmente, a partir del diagrama de esfuerzos se calcularán los esfuerzos en los materiales.

1) Obtención de la sección homogénea:

$$A_t = nA_s = 9.3*4*387 = 37.2 \text{ (barras de } \phi 7/8") * 387 = 14396 \text{ mm}^2$$



Tomando momentos de las áreas estáticamente útiles con respecto a la posible situación del eje neutro, resulta:

$$300x * \frac{x}{2} - 14396 * (440 - x) = 0$$

$$x^2 + 95.97x - 42228.26 = 0$$

$$\therefore \quad x = 163 \text{ mm}$$

$$d - x = 277 \text{ mm}$$

Figura 2.10

Momento de inercia (por facilidad en el manejo de las cifras, se calcula inicialmente en cm^4):

$$I_{x-x} = \frac{30*16.3^3}{3} + 37.2\frac{\pi*2.22^4}{64} + 143.96*27.7^2$$

$$I_{x-x} = 43307 + 44 + 110459 = 153810 \text{ cm}^4 \sim 0.001538 \text{ m}^4$$

Cabe destacar el orden de magnitud del momento de inercia del área transformada con respecto a su propio centro de gravedad, que, como se anotó, hace posible no tomarlo en cuenta.

2) Momentos resistentes por compresión y tracción y admisible de la sección:

Momento resistente admisible por concreto a la compresión:

$$f_c = \frac{Mx}{I_{x-x}} \quad \therefore \quad M_c = \frac{f_c * I_{x-x}}{x} = \frac{9500*0.001538}{0.163} = 89.64 \text{ kN·m}$$

Momento resistente por acero a la tracción:

$$f_s = \frac{nM(d-x)}{I_{x-x}} \quad \therefore \quad M_s = \frac{f_s * I_{x-x}}{n(d-x)} = \frac{120000*0.001538}{9.3*0.277} = 71.64 \text{ kN·m}$$

Momento resistente admisible de la sección: 71.64 kN·m

3) Carga a soportar en condiciones de seguridad

$$M_{actuante} = M_{resistente}$$

$$\frac{w\ell^2}{8} = \frac{w*8^2}{8} = 71.64 \text{ kN·m} \qquad \therefore \quad w = 8.96 \text{ kN/m}$$

w exterior actuante = w total – peso propio de la viga

w exterior actuante = 8.96 – 0.30*0.50*1.0*24 = 5.36 kN/m

La carga exterior a la viga que puede soportar en condiciones de seguridad resulta de 5.36 kN/m.

4) Esfuerzos de trabajo de los materiales

f_s: Para el momento resistente adoptado, que es el del acero de refuerzo trabajando a su esfuerzo admisible a la tracción, el valor de f_s será de 120 MPa.

f_c: A partir del diagrama de esfuerzos:

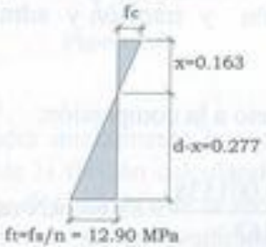


Figura 2.11

$$f_c = 0.163 * \frac{12.90}{0.277} = 7.59 \text{ MPa}$$

$f_c = 7.59$ MPa

puesto que $f_c < f_c$ máximo admisible se confirma el diseño sub-reforzado.

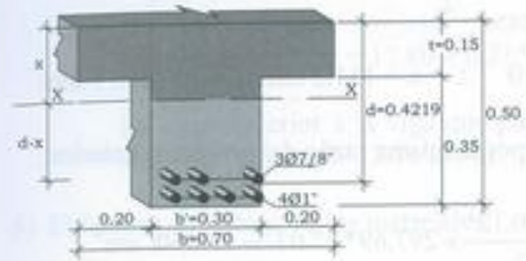
La secuencia de resultados parciales y el resultado final permiten concluir que son igualmente utilizables e intercambiables en forma total o parcial los dos métodos propuestos en los problemas 2.1 y 2.7 para la revisión de una sección diseñada a la flexión.

Una aplicación especialmente útil del método de la sección transformada u homogénea es la revisión de diseños a la flexión de vigas con sección en forma de "T" o similares. A continuación se incluyen algunos ejemplos de esta aplicación.

Problema 2.8

Revisar el diseño a flexión para momento máximo en el centro de la luz de 8 metros de una viga "T" simplemente apoyada sometida a carga uniforme, determinando el momento resistente, la carga w en kN/m que puede soportar

en condiciones de seguridad y los esfuerzos a que estarán trabajando los materiales, de acuerdo a la sección y datos adjuntos.



Concreto: $f'_c = 21.1$ MPa
Refuerzo: $f_s = 120$ MPa
$n = 9.3$

Figura 2.12

Solución

Primero se debe revisar que la sección cumpla los requisitos geométricos del Reglamento NSR-10 para su consideración como viga "T" y luego se obtienen la sección homogénea, los momentos resistentes, la carga a soportar y los esfuerzos en los materiales.

1) Revisión de la sección "T" según el Reglamento NSR-10 "En vigas aisladas, en las que solamente se utilice la forma T para proporcionar con el ala un área adicional de compresión, el ala debe tener un espesor no menor de 1/2 del ancho del alma, y un ancho efectivo no mayor de 4 veces el ancho del alma." (véase artículo C.8.12.4).

En este caso:

b (ancho efectivo de ala) ≤ 4b′ ∴ b < 4x300 = 1200 mm
t (espesor de ala) ≥ b′/2 ∴ t = 300 ÷ 2 = 150 mm

2) Obtención de la sección homogénea:

$$A_t = nA_s = 9.3*(4*510 + 3*387) = 29769 \text{ mm}^2$$

d = 421.9 mm (véase problema 2.2).

Obtención de x:

$$700*150\left(x-\frac{150}{2}\right)+300\frac{(x-150)^2}{2}=29769*(421.9-x)$$

$$x^2+598.46x-113730=0 \quad \therefore \quad x = 151.2 \text{ mm}; \; d-x = 270.7 \text{ mm}$$

Momento de inercia en cm^4, por la misma razón del problema anterior:

$$I_{x-x}=\frac{70*15.12^3}{3}-\frac{40*0.12^3}{3}+297.69*27.07^2=298798 \text{ cm}^4$$

$$I_{x-x} = 298798 \text{ cm}^4 \sim 0.002988 \text{ m}^4$$

3) Momentos resistentes:

Momento resistente admisible por concreto a compresión:

$$f_c=\frac{Mx}{I_{x-x}} \quad \therefore \quad M_c=\frac{f_c I_{x-x}}{x}=\frac{9500*0.002988}{0.1512}=187.7 \text{ kN·m}$$

Momento resistente admisible por acero a tracción:

$$f_s=\frac{nM(d-x)}{I_{x-x}} \quad \therefore \quad M_s=\frac{f_s I_{x-x}}{n(d-x)}=\frac{120000*0.002988}{9.3*0.2707}$$

$$M_s = 142.4 \text{ kN·m}$$

Momento resistente admisible de la sección: 142.4 kN·m. (Diseño sub - reforzado).

4) Carga a soportar en condiciones de seguridad:

$$M_{actuante} = M_{resistente}$$

$$\frac{w\ell^2}{8}=\frac{w*8^2}{8} = 142.4 \text{ kN·m} \; \therefore \quad w = 17.80 \text{ kN/m}$$

w exterior actuante = w total – peso propio de la viga
w exterior actuante = 17.80 – 0.21*1.00*24 = 12.76 kN/m

La carga exterior a la viga que puede soportar en condiciones de seguridad resulta de 12.76 kN/m.

5) Esfuerzos de trabajo de los materiales:

f_s: Para el momento resistente adoptado, que es el del acero de refuerzo trabajando a su esfuerzo admisible a la tracción, el valor de f_s será de 120 MPa.

f_c: A partir del diagrama de esfuerzos:

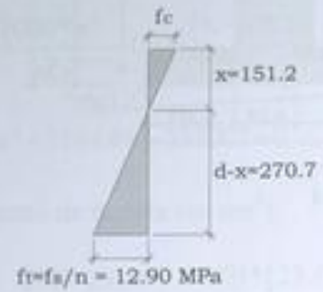


Figura 2.13

$$f_c=151.2*\frac{12.90}{270.7}=7.20 \text{ MPa}$$

$f_c = 7.20$ MPa

puesto que $f_c < f_c$ máximo admisible se confirma el diseño sub-reforzado.

Nota: A manera de conclusión, se destaca el aumento considerable de la compresión proporcionado por la aleta de la viga "T" que convierte al diseño sobre-reforzado del problema 2.2 en un diseño sub-reforzado y que además hace efectiva, en cuanto a momento resistente de la sección, la adición de armadura con respecto al problema 2.1

Problema 2.9

Revisar el diseño a flexión para momento máximo en el centro de la luz de 12 metros de una viga doble "T" simplemente apoyada sometida a carga uniforme, determinando el momento resistente, la carga w en kN/m que puede soportar en condiciones de seguridad y los esfuerzos a que estarán trabajando los materiales, de acuerdo a la sección y datos adjuntos:

Concreto: f'_c = 21.1 MPa

Refuerzo: f_s = 120 MPa

n = 9.3

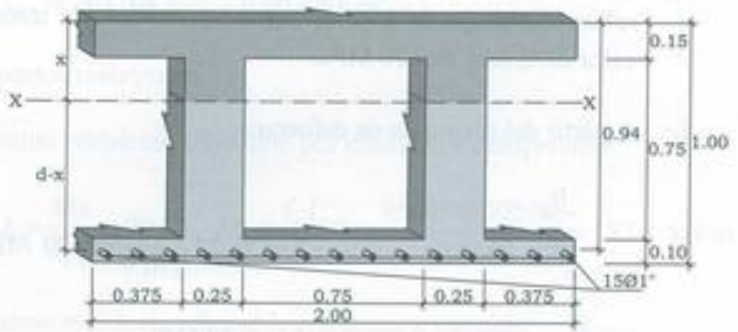


Figura 2.14

Solución

Primero se debe revisar que la sección cumpla los requisitos geométricos del Reglamento NSR-10 para su consideración como un sistema de vigas "T" y luego se obtiene la sección homogénea, los momentos resistentes, la carga a soportar y los esfuerzos en los materiales.

1) Revisión de la sección "T" según el Reglamento NSR 10 "El ancho efectivo de la losa usada como ala de las vigas T no debe exceder 1/4 de la luz de la viga, y el ancho sobresaliente efectivo del ala a cada lado del alma no debe exceder:

a) 8 veces el espesor de losa, y
b) la mitad de la distancia libre a la siguiente alma" (véase el Artículo C.8.12.2).

En el presente caso:

b (ancho efectivo de ala) $\leq \frac{\ell}{4}$ = 12.00/4 = 3.00 m; b = 1.00 m

b (ancho efectivo de ala) ≤ 16t + b' = 16*0.15 + 0.25*2 = 2.90 m

b (ancho efectivo de ala) ≤ separación centro a centro del sistema = 1.00 m

2) Obtención de la sección homogénea:

$$A_t = nA_s = 9.3*15*510 = 71145 \text{ mm}^2$$

Obtención de x:

$$\frac{2000*x^2}{2} - 1500\frac{(x-150)^2}{2} = 71145(940-x)$$

$$x^2 + 1184.6x - 335005 = 0 \quad \therefore \quad x = 235.8 \text{ mm}; \; d - x = 704.2 \text{ mm}$$

Momento de inercia (en cm^4):

$$I_{x-x} = \frac{200*23.58^3}{3} - \frac{150*(23.58-15)^3}{3} + 711.45*70.42^2$$

$$I_{x-x} = 443370 \text{cm}^4 (0.044337 \text{m}^4)$$

3) Momentos resistentes:

Momento resistente admisible por concreto a compresión:

$$f_c = \frac{Mx}{I_{x-x}} \quad \therefore \quad M_c = \frac{f_c I_{x-x}}{x} = \frac{9500 * 0.044337}{0.2358} = 1786.3 \text{ kN·m}$$

Momento resistente admisible por acero a tracción:

$$f_s = \frac{nM(d-x)}{I_{x-x}} \quad \therefore \quad M_s = \frac{f_s I_{x-x}}{n(d-x)} = \frac{120000 * 0.044337}{9.3 * 0.7042} = 812.4 \text{ kN·m}$$

Momento resistente admisible de la sección: 812.4 kN·m
(Diseño sub-reforzado).

4) Carga a soportar en condiciones de seguridad:

$M_{actuante} = M_{resistente}$

$$\frac{w\ell^2}{8} = \frac{w * 12^2}{8} = 812.4 \text{ kN·m} \quad \therefore \quad w = 45.13 \text{ kN/m}$$

w exterior actuante = w total – peso propio de la viga
w exterior actuante = 45.13 – 0.875*1.00*24 = 24.13 kN/m

La carga exterior a la viga que puede soportar en condiciones de seguridad resulta de 24.13 kN/m.

5) Esfuerzos de trabajo de los materiales:

f_s: Para el momento resistente adoptado, que es el del acero de refuerzo trabajando a su esfuerzo admisible a la tracción, el valor de f_s será de 120 MPa.

f_c: A partir del diagrama de esfuerzos:

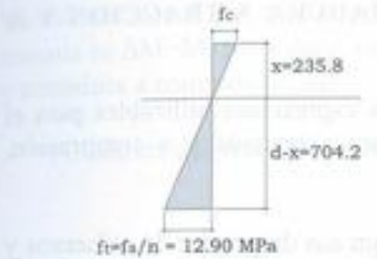


Figura 2.15

$$f_c = 235.8 * \frac{12.90}{704.2} = 4.32 \text{ MPa}$$

$f_c = 4.32$ MPa

puesto que $f_c < f_c$ máximo admisible se confirma el diseño sub-reforzado.

Se finaliza esta breve incursión sobre el método elástico en su tratamiento de la flexión, con las denominadas vigas con armadura a compresión cuya razón de ser radica en la imposibilidad que existe en algunas ocasiones de aumentar las dimensiones de secciones sometidas a momentos flectores mayores que los resistidos por condiciones de trabajo máximo admisible. Este caso se soluciona con una armadura adicional a tracción y una armadura en la zona de compresiones que le da su nombre al sistema.

VIGAS RECTANGULARES CON ARMADURA A TRACCION Y A COMPRESION

A continuación se deducirán las principales expresiones utilizables para el diseño de vigas rectangulares con armadura a tracción y a compresión, según el método elástico.

A partir del funcionamiento de la sección con sus diagramas de esfuerzos y deformaciones según la figura:

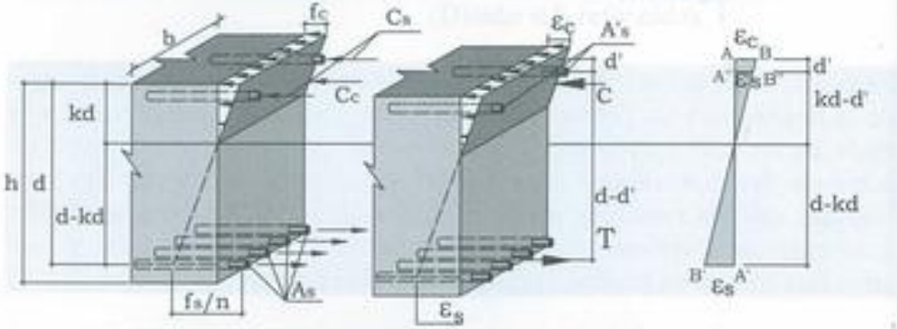


Figura 2.16

A la nomenclatura conocida se adiciona:

- d' = distancia de la fibra más comprimida al centro de gravedad de las áreas de refuerzo a la compresión;
- f'_s = esfuerzo de compresión en el acero;
- C_c = resultante de compresiones en el concreto;
- C_s = resultante de compresiones en el acero;
- A_{s2} = armadura adicional de tracción para el momento flector por encima del correspondiente a la viga con sólo armadura a tracción;
- A'_s = armadura a compresión.

La viga con armadura simple o sólo a tracción resiste un momento $M_1=Kbd^2$ y está provista de una cantidad de refuerzo $A_{s1}=\rho bd$.

La diferencia entre el momento actuante y el que toma como simplemente armada es $\Delta M=M-M_1$ y debe ser resuelta con armadura adicional a tracción y armadura a compresión, así:

Armadura adicional a tracción: $A_{s2}=\dfrac{\Delta M}{f_s(d-d')}$, por lo que:

Armadura total a tracción: $A_{s1}+A_{s2}=\rho bd+\dfrac{\Delta M}{f_s(d-d')}$

Por otra parte:

Armadura a compresión: $A'_s=\dfrac{\Delta M}{f'_s(d-d')}$, en donde el valor de f'_s puede calcularse a partir del diagrama de deformaciones basado en las hipótesis de que la sección es plana antes y después de deformada y que las deformaciones de las fibras son proporcionales a sus distancias al eje neutro y a los esfuerzos que las producen:

$$\frac{\frac{f_c}{E_c}}{kd}=\frac{\frac{f'_s}{E_s}}{kd-d'}=\frac{\frac{f_s}{E_s}}{d-kd}$$, de donde:

$$f'_s=nf_c\frac{kd-d'}{kd} \quad \text{o} \quad f'_s=f_s\frac{kd-d'}{d-kd}$$ las cuales son expresiones de f'_s elásticamente obtenidas.

Sin embargo, teniendo en cuenta que la condición de elasticidad del concreto disminuye a medida que se aumentan los esfuerzos y sus deformaciones, que las deformaciones en el acero a compresión y el concreto que lo rodea deben ser simultáneamente iguales y que la fluencia lenta en el concreto a compresión en contacto con las barras significa deformaciones adicionales en el acero aumentando su esfuerzo de compresión, se especifica para el diseño que el esfuerzo de compresión en el

acero se tome como dos veces el calculado elásticamente, pero no mayor que el valor admisible en tracción.

Por tanto, se tomará:

$$2f'_s = 2nf_c\frac{kd-d'}{kd} \le f_s \quad \text{o} \quad 2f'_s = 2f_s\frac{kd-d'}{d-kd} \le f_s$$

y la armadura a compresión será: $A'_s = \dfrac{\Delta M}{2f'_s(d-d')}$

expresiones estas que se aplicarán a continuación.

Problema 2.10

Diseñar la armadura necesaria a flexión en una viga de 0.30 x 0.50m simplemente apoyada en una luz de 8 metros, armada en concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero para f_s=120 MPa, n=9.3 y una carga exterior de 10.72 kN/m. (Nótese que la carga sobre la viga es ahora el doble de la que soportaba en condiciones de seguridad en el problema 2.1).

Solución

Se debe obtener el momento actuante según la carga propuesta y hacer el diseño correspondiente según las relaciones deducidas.

1) Obtención de M actuante y comparación con M_1:

Cargas: peso propio viga: 0.30*0.50*1.00*24 = 3.60 kN/m
carga sobre la viga = 10.72 kN/m
w = 14.32 kN/m

M actuante $= \dfrac{w\ell^2}{8} = \dfrac{14.32*8^2}{8}$ = 114.56 kN·m

$M_1 = K_{bal}\,bd^2 = 1729.6*0.30*0.42^2$ = 91.53 kN·m

ΔM = Momento adicional sobre M_1 = 23.03 kN·m

2) Armaduras:

Armadura a tracción: $A_s = A_{s1} + A_{s2} = \rho_{bal}\cdot bd + \dfrac{\Delta M}{f_s(d-d')}$

$$A_s = 0.016789*0.30*0.42 + \frac{23.03}{120000*(0.42-0.05)}$$

$A_s = 0.002115 + 0.000519 = 0.002634\ m^2\ (2634\ mm^2)$

Se colocan 4 ϕ 1" en la fila inferior y 2 ϕ 7/8" en la segunda fila.

Armadura a compresión: $A'_s = \dfrac{\Delta M}{2f'_s(d-d')}$, si $2f'_s \le f_s$

Se calcula $f'_s = nf_c\dfrac{kd-d'}{kd}$, en donde k = 0.4241,

kd = 178.1 mm y d' = 50 mm

$f'_s = 9.3*9.5*\dfrac{178.1-50}{178.1}$ = 63.61 MPa ∴ $2f'_s$ = 121.2 MPa > f_s admisible

Por tanto: $A'_s = \dfrac{23.03}{120000*(0.42-0.05)} = 0.000519\,m^2 (519\ mm^2)$

Se coloca 3 ϕ 5/8"

3) Localización de la armadura transversal y longitudinalmente:

En la sección transversal resulta:

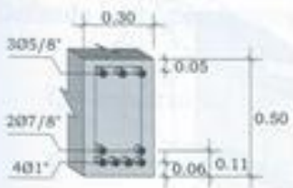


Figura 2.17

chequeo de d':40 + 15.9/2 = 47.95 ~ 50 mm

chequeo de d:

$$z = \frac{4*510*60 + 2*387*110}{4*510 + 2*387} = 73.8 - 80mm$$

∴ d = h − z = 500 − 80 = 420 mm

En la sección longitudinal resulta: $\frac{x^2}{\Delta M} = \frac{\left(L/2\right)^2}{M}$, reemplazando:

$$x^2 = \frac{4^2 * 23.3}{114.56} = 3.25 \quad x = 1.80 \text{ m}$$

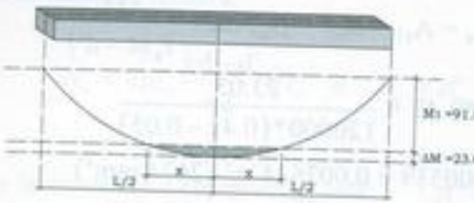


Figura 2.18

Teóricamente, la armadura a compresión es necesaria hasta una distancia x = 1.80 m a cada lado del centro de la viga.

Aplicación de la sección transformada para vigas con armadura a compresión

A partir de las relaciones correspondientes a la sección transformada y la especificación que permite el uso de dos veces el área de la armadura a compresión al computar el área de la sección transformada u homogénea, se obtienen las expresiones necesarias para la revisión de una sección rectangular doblemente armada o con armadura a compresión.

Se parte de una sección rectangular con armadura a tracción y a compresión y se requiere reemplazar el refuerzo por un concreto teórico que resista lo que el refuerzo para lograr una sección transformada u homogénea a la cual se le pueda aplicar la fórmula de la flexión.

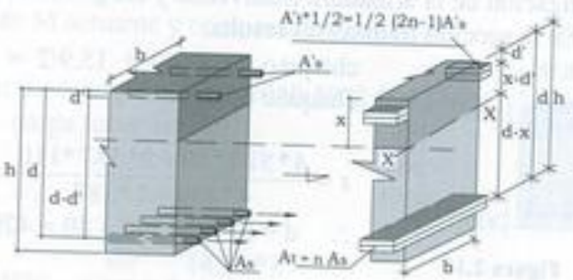


Figura 2.19

Obtención de la sección transformada:

De la sección correspondiente: $A_t = nA_s$

Para computar el área teórica de concreto a compresión, se toma dos veces el área de la armadura a compresión siempre que el esfuerzo de compresión resultante en el acero no sea mayor que el admisible a tracción. Con esto se pretende no sólo obtener una sección homogénea, sino también, recuperar sus características de elasticidad necesarias para la aplicación de este método.

$$A'_t = 2nA'_s - A'_s = (2n-1)A'_s$$

Para obtener x se toman momentos de las áreas estáticamente útiles con respecto a la posible situación del eje neutro:

$$\frac{bx^2}{2} + (2n-1)A'_s(x-d') = nA_s(d-x)$$, ecuación que resolvemos para x.

A partir de x se calcula el momento de inercia:

$$I_{x-x} = \frac{bx^3}{3} + I_{A'_t}(\text{a su C.G.}) + A'_t(x-d')^2 + I_{A_t}(\text{a su C.G.}) + A_t(d-x)^2$$

en donde se puede no tener en cuenta los momentos de inercia de las áreas transformadas con respecto a sus propios centros de gravedad.

Definida la sección homogénea, se aplica la fórmula de la flexión:

f_c = esfuerzo de compresión en el concreto = $\frac{Mx}{I_{x-x}}$

f_t = esfuerzo de tracción en el concreto teórico

$$f_t = \frac{M(d-x)}{I_{x-x}} \quad \therefore \quad f_s = \frac{nM(d-x)}{I_{x-x}}$$

f'_t = esfuerzo de compresión en el concreto teórico

$$f'_t = \frac{M(x-d')}{I_{x-x}} \quad \therefore \quad f'_s = \frac{2nM(x-d')}{I_{x-x}}$$

Siendo M en las expresiones anteriores el Momento actuante = Momento resistente

De igual manera:

M_c = M resistente por compresión $= \dfrac{f_c I_{x-x}}{x}$ y

M_s = M resistente por tracción $= \dfrac{f_s I_{x-x}}{n(d-x)}$

Finalmente, a partir del diagrama de esfuerzos de la sección homogénea, se puede concluir:

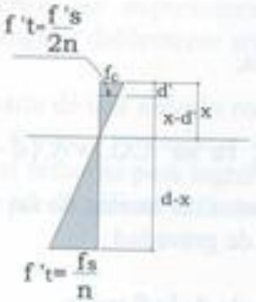


Figura 2.20

$$f_c = \frac{f_s}{n}\frac{x}{d-x}$$

$$f'_s = 2n\, f_c \frac{x-d'}{x} \le f_s$$

$$f'_s = 2 f_s \frac{x-d'}{d-x} \le f_s$$

Expresiones estas coincidentes con todas las anteriormente expuestas.

Problema 2.11

Revisar el diseño a flexión para momento máximo en el centro de la luz de 8 metros de la viga simplemente apoyada sometida a la carga uniforme utilizada en el problema 2.10.

Solución

La sección resultado del diseño a flexión del problema 2.10 y los materiales respectivos son los siguientes:

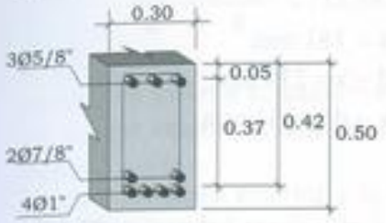


Figura 2.21

Concreto: $f'_c = 21.1$ MPa

Refuerzo: $f_s = 120$ MPa

$n = 9.3$

En primer término se debe obtener la sección homogénea a la cual se le aplicará la fórmula de la flexión calculando los momentos resistentes por compresión, tracción y el admisible de la sección como requisito para determinar la carga que puede soportar en condiciones de seguridad y finalmente a partir del diagrama de esfuerzos se calcularán los esfuerzos en los materiales.

1) Obtención de la sección homogénea:

$$A_t = nA_s = 9.3*(4*510 + 2*387) = 26170 \text{ mm}^2$$

$$A'_t = (2n-1)A'_s = 17.6*3*199 = 10268 \text{ mm}^2$$

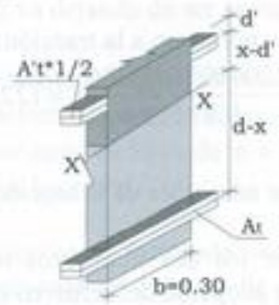


Figura 2.22

Obtención de x:

$$300\frac{x^2}{2} + 10268*(x-50) = 26170*(420-x)$$

$$x^2 + 242.9x - 76699 = 0 \quad \therefore \quad x = 181 \text{ mm}$$

$$d - x = 239 \text{ mm}$$

$$x - d' = 131 \text{ mm}$$

Momento de inercia en cm^4:

$$I_{x-x} = \frac{30*18.1^3}{3} + 17.6*3*\frac{\pi*1.99^4}{64} + 102.68*13.1^2 + 9.3*4*\frac{\pi*2.54^4}{64}$$

$$+9.3*2*\frac{\pi*2.22^4}{64} + 261.70*23.9^2$$

$$I_{x-x} = 59297 + 40.62 + 17621 + 75.96 + 22.17 + 149486$$

$$I_{x-x} = 226543 \text{ cm}^4$$

2) Momentos resistentes:

Momento resistente admisible por compresión:

$$M_c = \frac{f_c\, I_{x-x}}{x} = \frac{9500*0.002265}{0.181} = 118.88 \text{ kN·m}$$

Momento resistente por acero a la tracción:

$$M_s = \frac{f_s\, I_{x-x}}{n(d-x)} = \frac{120000*0.002265}{9.3*0.239} = 122.28 \text{ kN·m}$$

Momento resistente admisible de la sección: 122.28 kN·m.

La diferencia entre los dos momentos resistentes se debe a la aproximación en la adopción del refuerzo en el problema 2.10.

3) Carga a soportar en condiciones de seguridad:

$M_{actuante} = M_{resistente}$

$$\frac{w\ell^2}{8} = \frac{w*8^2}{8} = 118.88 \text{ kN·m} \quad \therefore \quad w = 14.86 \text{ kN/m}$$

w exterior actuante = w total – peso propio de la viga

w exterior actuante = 14.86 – 0.30*0.50*1.00*24 = 11.26 kN/m

La carga exterior a la viga que puede soportar en condiciones de seguridad resulta de 11.26 kN/m, la cual es un poco mayor a la carga de diseño del problema 2.10 porque en la colocación del refuerzo de dicho problema se procedió por exceso.

Conclusiones

La breve muestra del tratamiento de la flexión por el método elástico permite sacar algunas conclusiones:

1) El método elástico, como su nombre lo indica, se basa en consideraciones de elasticidad, que sólo son completamente válidas para el acero; en el concreto el diagrama deformaciones-esfuerzos no es una recta y la proporcionalidad de las deformaciones con respecto a los esfuerzos que las producen sólo es aceptable para pequeñas deformaciones y esfuerzos, pero a medida que éstos crecen la proporcionalidad va dejando de ser correcta.

2) El módulo de elasticidad del concreto E_c sólo es válido para un esfuerzo y una deformación admisibles; si el esfuerzo varía, también cambiará E_c y por tanto el valor de $n = E_s / E_c$, que se ha considerado constante en todos los casos.

3) En el método elástico el factor de seguridad de un diseño no se determina exactamente en función de consideraciones tales como importancia o probabilidad de presentación de las cargas, de la

indeterminación de un diseño o del funcionamiento de la estructura así diseñada, del control de calidad de los materiales y de la construcción. Sólo se supone admisible y así se puede verificar, por medio del método de la resistencia última que se estudiará a continuación.

Las consideraciones anteriores, entre otras, son las que han relegado el método elástico a una simple alternativa de diseño en el Apéndice C-G del Reglamento NSR-10. Sin embargo, de la anterior exposición teórica del método y su elemental aplicación presentada para algunos casos de normal ocurrencia se ratifica el concepto expresado sobre la necesidad que tienen los estudiantes del área de su conocimiento como parte esencial en su formación académica y con mayor razón si en alguna parte de su ejercicio profesional lo pudieran encontrar.

METODO DE LA RESISTENCIA ULTIMA

Por el método elástico o de los esfuerzos de trabajo, el diseñador obtiene los esfuerzos y deformaciones que se presentan en una estructura sometida a las cargas para las cuales se diseña, suponiendo parámetros elásticos de los materiales.

Por el método de la resistencia última, también llamado solamente método de la resistencia, el diseñador podrá estudiar el comportamiento de la estructura en el instante de falla; por tanto, si este instante se hace lo suficientemente mayor que el de su trabajo para las cargas que soporta normalmente, se podrá tener un diseño con factores de seguridad apropiados.

Este trabajo de la estructura en su última resistencia no es posible conocerlo a partir del método elástico, en vista de que el comportamiento de los materiales inelásticos en el instante de falla es diferente al supuesto dentro del período elástico de su funcionamiento, es decir, para su trabajo con cargas, esfuerzos y deformaciones admisibles.

Como una introducción al estudio del comportamiento de la estructura en el

instante de falla, se anota que los elementos de concreto reforzado sujetos y diseñados a flexión por cualquier método apropiado, deben fallar cuando el acero a tracción alcanza su límite elástico. En otras palabras, si gradualmente se aumenta la carga hasta que $f_s = f_y$, el elemento resistirá carga adicional en la medida en que se aumenta el brazo del par interior resistente y hasta que la falla definitiva se presente por aplastamiento del concreto a compresión, aunque inicialmente la falla se debió a la fluencia del acero.

Antes de acometer el estudio de las relaciones que rigen el Método de la Resistencia Última nos referiremos a los Estados Límites en el diseño de concreto reforzado para establecer su relación con esta metodología.

Estados Límites:

Se denomina estado límite de una estructura o elemento estructural cuando llega al límite de su uso programado. Para las estructuras de concreto podemos considerar los siguientes estados límites:

1. **Estado límite de falla**: Corresponde al colapso parcial o total de una estructura con características como la pérdida de equilibrio total o parcial, la rotura del elemento o de los elementos principales o básicos que conduzcan al colapso, la falla progresiva por diferentes motivos, la formación de mecanismos plásticos y la fatiga del material.
2. **Estado límite de servicio**: Corresponde a la interrupción del uso de la estructura, sin que conlleve al colapso, por factores como deflexiones excesivas, fisuras o grietas importantes o vibraciones excesivas.
3. **Estados límites especiales**: Corresponden a daños o fallas debidos a condiciones especiales como movimientos sísmicos anormales, intervención del fuego, explosiones, colisiones de diverso tipo, corrosión, deterioro por factores no contemplados en el diseño.

Para el diseño por estados límites se procede teniendo en cuenta los posibles modos de falla, determinando los factores de seguridad apropiados para

cada estado límite y diseñando de acuerdo al estado limite escogido. En consecuencia, se puede identificar el diseño por el denominado Método Elástico o de los Esfuerzos Admisibles, así como el Método de la Resistencia dentro de algunos de los estados límites mencionados.

A continuación estableceremos las relaciones existentes en la sección en el instante de la falla para vigas rectangulares con armadura a la tracción.

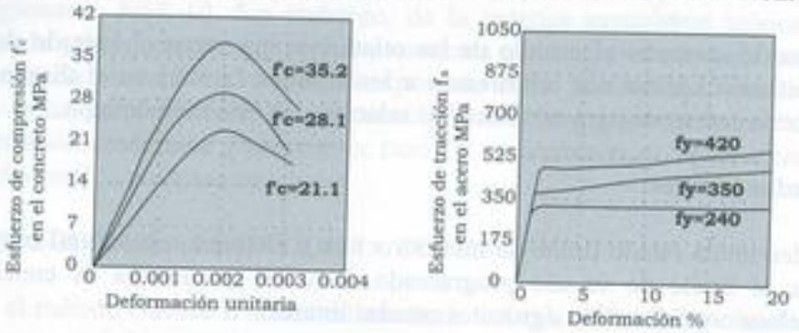


Figura 2.23

Vigas rectangulares con armadura a tracción

Se trata, entonces, de obtener una expresión de momento resistente último para vigas rectangulares sometidas a flexión con armadura a tracción, según la teoría de la resistencia última y una expresión de cuantía máxima de refuerzo en el diseño balanceado y su posible limitación para diseños apropiados.

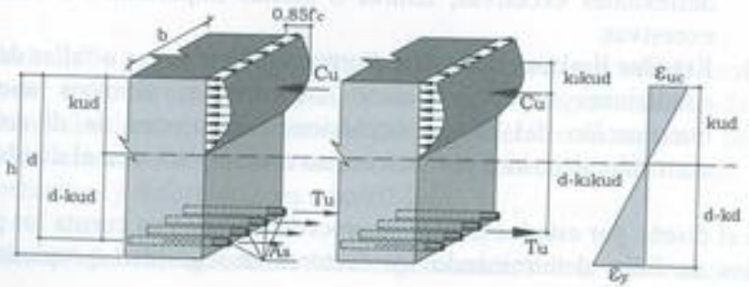


Figura 2.24

En esta obtención se utiliza un procedimiento abreviado con propósitos didácticos, partiendo de la sección longitudinal y de la transversal plana antes y después de la deformación por flexión, con la siguiente nomenclatura:

- b, d: dimensiones útiles de la sección;
- ku: factor menor que la unidad, que multiplicado por "d" da la profundidad del eje neutro;
- k_1: factor que hace promedios los esfuerzos de compresión en el concreto;
- k_2: factor menor que la unidad que multiplicado por kud da la profundidad del punto de aplicación de la resultante de compresiones.

Se puede decir que en el instante de la falla, la compresión C_u es igual a la tracción T_u, las cuales se evalúan:

$C_u = 0.85f'_c * k_1 * kud * b$, en donde la expresión $0.85f'_c$ corresponde al máximo valor de la compresión como resultado de la flexión y su magnitud obedece a obtención experimental.

$T_u = A_s f_y = \rho bdf_y$

Igualando $C_u = T_u$ resulta:

$0.85f'_c * k_1 * k_u = \rho f_y$

Por tanto:

$$ku = \frac{\rho f_y}{0.85f'_c * k_1}$$

expresión que hace posible conocer la profundidad del eje neutro en función de ρ y la calidad de los materiales.

También en el instante de la falla, se pueden expresar los momentos resistentes últimos como:

$$M_u = C_u(d - k_2 * kud) = T_u(d - k_2 * kud)$$

Aceptando que los elementos de concreto reforzado diseñados a flexión deben fallar cuando el acero de tracción alcanza su límite elástico, se toma el momento correspondiente a la tracción como el inicial y resistente último de la sección:

$$M_n = \rho bd * f_y\left(d - k_2\frac{\rho f_y}{0.85f'_c * k_1}d\right), \quad \text{que se reagrupa:}$$

$$M_n = \rho * f_y\left(1 - \frac{k_2}{0.85 * k_1} * \frac{\rho f_y}{f'_c}\right)bd^2$$

en donde $m = \dfrac{k_2}{0.85k_1}$ constituye una propiedad intrínseca del concreto en sus diferentes calidades y cuya evaluación experimental a través de numerosos ensayos dio como resultado:

$m = 0.59$, que se reemplaza en la fórmula de M_n, obteniendo:

$$M_n = \rho f_y\left(1 - 0.59\frac{\rho f_y}{f'_c}\right)bd^2,$$

expresión ésta conocida como la fórmula general de la resistencia última.

Sección Balanceada:

Ahora bien, en la deducción anterior se parte de la falla inicial por el acero de refuerzo, lo cual implica secciones sub-reforzadas; para poder garantizar esta situación se debe obtener antes la cuantía necesaria para una falla simultánea de acero y concreto, es decir, la cuantía balanceada y a partir de ella garantizar el sub-refuerzo apropiado. De acuerdo con el diagrama de deformaciones de la figura 2.25, y suponiendo que el acero falle por tracción simultáneamente con el concreto a compresión, se puede al mismo tiempo tener ε_{uc} y ε_y:

$$\frac{\varepsilon_{uc}}{kud} = \frac{\varepsilon_y}{d - kud} \quad \therefore \quad ku = \frac{\varepsilon_{uc}}{\varepsilon_{uc} + \varepsilon_y}$$

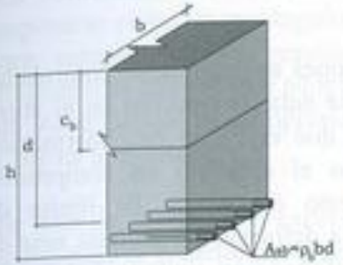


Figura 2.25

en donde ε_{uc} variable entre 0.003 y 0.004 se toma como 0.003 y $\varepsilon_y = f_y/E_s$

Por otra parte, de arriba, con $C_u = T_u$ se toma:

$$\rho = 0.85\frac{f'_c}{f_y} * k_1 k_u = 0.85\frac{f'_c}{f_y} * k_1 * \frac{\varepsilon_{uc}}{\varepsilon_{uc} + \varepsilon_y}$$

La anterior constituye una expresión de cuantía en función de las deformaciones, en donde k_1 se toma como un promedio de 0.85 para resistencias a la compresión del concreto f'_c hasta de 28 MPa, cargas bajas y gradualmente aplicadas. Si en esta expresión, como se dijo antes, se hace simultáneamente $\varepsilon_{uc}=0.003$ y $\varepsilon_y=f_y/E_s$, se consigue la ρ máxima en la condición balanceada.

A manera de ejemplo, se calcula a continuación ρ balanceada para las condiciones de materiales $f'_c = 21.1$ MPa y $f_y = 240$ MPa:

$$\rho_{balanceado} = 0.85\frac{21.1}{240} * 0.85 * \frac{0.003}{0.003 + \dfrac{240}{200000}} = 0.045371$$

De igual forma se calcula para las condiciones de materiales $f'_c = 21.1$ MPa y $f_y = 420$ MPa. En este caso debe tenerse en cuenta que el Reglamento en C.10.3.3 permite fijar el límite de deformaciones unitaria controlada por compresión en 0.002.

$$\rho_{balanceado} = 0.85\frac{21.1}{420} * 0.85 * \frac{0.003}{0.003 + 0.002} = 0.021778$$

Secciones controladas por compresión:

Según el Reglamento colombiano "las secciones se denominan controladas por la compresión si la deformación unitaria neta de tracción en el acero externo en tracción, ε_t, es igual o menor que el límite de deformación unitaria controlada por compresión cuando el concreto en compresión alcanza su límite de deformación supuesto de 0.003. El límite de deformación controlada por compresión es la deformación unitaria neta de tracción del refuerzo en condiciones de deformación unitaria balaceada. Para refuerzo Grado 420 y para todos los refuerzos pre-esforzados, se permite fijar el límite de deformación unitaria controlada por compresión en 0.002".

Secciones controladas por la tracción y región de transición:

Según el Reglamento colombiano "las secciones son controladas por tracción si la deformación unitaria neta de tracción en el refuerzo de acero extremo en tracción, ε_t, es igual o mayor a 0.005, justo cuando el concreto en compresión alcanza su límite de deformación unitaria asumido de 0.003. Las secciones con ε_t entre el límite de deformación unitaria controlada por compresión y 0.005 constituyen una región de transición entre secciones controladas por compresión y secciones controladas por tracción".

Para deformaciones unitarias netas de tracción en el acero de refuerzo extremo en tracción iguales o mayores a 0.005, la sección se define controlada por tracción. Igualmente, cuando la deformación unitaria neta de tracción en el refuerzo de acero externo en tracción es pequeña, la sección puede presentar control por compresión.

Distribución Equivalente del Esfuerzo de Compresión. Método de Whitney

La distribución del esfuerzo de compresión en el instante de la falla puede suponerse como un rectángulo, un trapecio, una parábola o cualquier diseño que cumpla con los resultados requeridos. El Reglamento ACI y el Reglamento colombiano adoptaron una distribución rectangular equivalente de los esfuerzos de compresión inicialmente propuesta por el investigador Charles S. Whitney.

Se trata de obtener una expresión de momento resistente último para vigas rectangulares sometidas a flexión con armadura a tracción, suponiendo una distribución rectangular de los esfuerzos de compresión como diagrama equivalente con un esfuerzo unitario de $0.85f'_c$, complementando con las expresiones usadas actualmente en el diseño y su tabulación.

A partir de las secciones longitudinal y transversal adjuntas en las cuales se reemplaza el bloque real de compresiones por uno equivalente de forma rectangular, siendo todos los esfuerzos de compresión iguales a $0.85f'_c$ resulta:

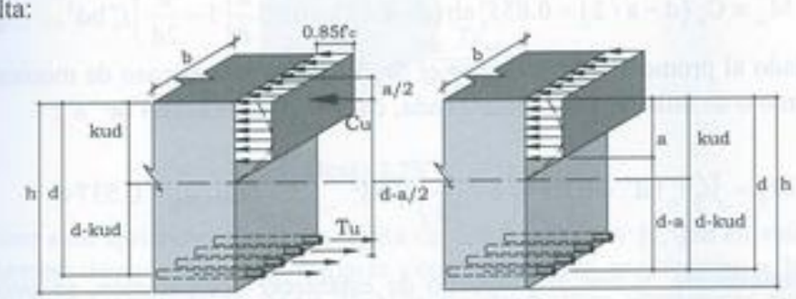


Figura 2.26

Para la compresión $C_u = T_u$ en el instante de falla:

$0.85 f'_c ab = A_s f_y = \rho bd f_y \quad \therefore \quad a = \dfrac{\rho f_y}{0.85 f'_c} d$, expresión que permite conocer la profundidad del bloque rectangular de compresiones en función de ρ y los materiales.

También en el instante de la falla, el momento resistente último que, como antes se dijo, está determinado por el acero de tracción al llegar a su límite elástico, se expresa como:

$$M_n = T_u (d - a/2) = \rho bd f_y (d - a/2) = \rho bd f_y \left(d - \frac{\rho f_y}{2 * 0.85 f'_c} d \right)$$

reagrupando: $M_n = \rho f_y \left(1 - 0.59 \dfrac{\rho f_y}{f'_c} \right) bd^2$, que es la misma fórmula general de la resistencia última presentada antes.

Sólo con el propósito de establecer una expresión límite de "a" en función de "d", se trabaja con el momento resistente último por el concreto en compresión:

$$M_n = C_u (d - a/2) = 0.85 f'_c ab (d - a/2) = 0.85 \frac{a}{d} \left(1 - \frac{a}{2d} \right) f'_c bd^2, \quad \text{que}$$

igualado al promedio obtenido por el Sr. Whitney para el caso de momento máximo o de falla para la ρ balanceada, dará el valor máximo de "a":

$$M_n = \tfrac{1}{3} f'_c bd^2 = 0.85 \frac{a}{d} \left(1 - \frac{a}{2d} \right) f'_c bd^2 \quad \therefore \quad a_{máxima} = 0.537\, d$$

Adicionalmente, y con el propósito de establecer comparación, se puede obtener el valor de kud, profundidad del eje neutro, en función de "a". Del problema anterior:

$$ku = \frac{\rho f_y}{0.85 f'_c k_1} \qquad \text{en donde se reemplaza:} \quad \frac{\rho f_y}{0.85 f'_c} = \frac{a}{d}$$

$\therefore$ $kud = a / k_1$ Si se toma $k_1 = 0.85$ para resistencias a compresión del concreto f'_c menores o iguales a 28 MPa, resulta:

$kud = 1.18\, a$

El Reglamento colombiano NSR-10 y el Reglamento ACI-318, aceptan como suposición de diseño que la máxima deformación unitaria utilizable en la fibra extrema sometida a compresión del concreto sea 0.003 y que el esfuerzo en el concreto de $0.85 f'_c$ se distribuya uniformemente sobre una zona equivalente de compresión limitada por los bordes de la sección transversal y por una línea recta paralela al eje neutro a una distancia $a = \beta_1 c$ de la fibra de máxima deformación sometida a compresión.

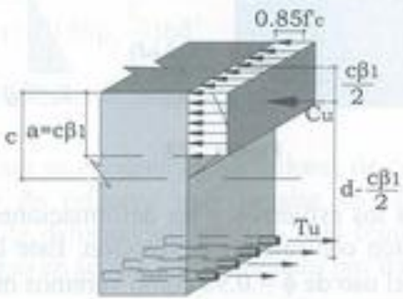


Figura 2.27

Se resume esta aproximación en la figura en donde el factor β_1, que en este texto hemos llamado k_1, debe tomarse como 0.85 para resistencias a la compresión del concreto f'_c hasta 28 MPa inclusive. Para resistencias por encima de 28 MPa, β_1 debe reducirse a razón de 0.05 por cada 7 MPa por encima de 28 MPa, pero no puede ser menor de 0.65. Por tanto:

$$\beta_1 = 0.85 - 0.05 \left[\frac{f'_c - 28}{7} \right] \geq 0.65$$

Es con estas suposiciones que el Reglamento colombiano protocoliza la utilización de las expresiones antes estudiadas del método de la resistencia última, limitándose a reglamentar su uso con requisitos de seguridad apropiados y que, además, dependen de las secciones según sean controladas por la tracción o la compresión.

La figura 2.28 presenta los esfuerzos y deformación para condición de deformación balanceada por flexión:

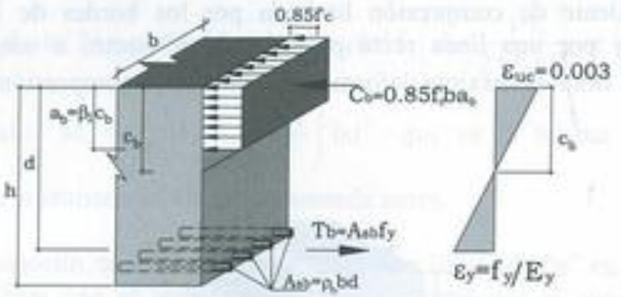


Figura 2.28

La figura 2.29 muestra los esfuerzos y las deformaciones para una sección en el límite de la sección controlada por tracción. Este límite corresponde, además, al límite para el uso de $\phi = 0.90$ como veremos más adelante.

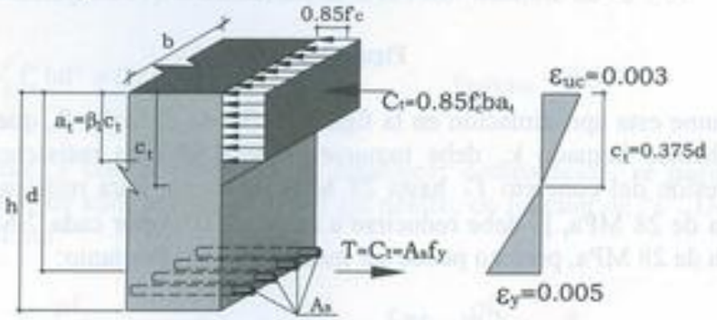


Figura 2.29

De la figura 2.29 obtenemos las expresiones en el límite de las secciones controladas por tracción, utilizando el subíndice t:

$$c_t = 0.375d_t$$

$$a_t = \beta_1 c_t = 0.375\beta_1 d_t$$

$$C_t = 0.85f'_c ba_t = 0.319\beta_1 f'_c bd_t$$

$$T = A_s f_y$$

$$A_s = 0.319\beta_1 f'_c bd_t / f_y$$

$$\rho_t = A_s / (bd_t) = 0.319\beta_1 f'_c / f_y$$

$$Mn_t = \rho_t f_y (1 - 0.59\rho_t \frac{f_y}{f'_c}) bd_t^2$$

y el momento nominal para diseño, de acuerdo a especificaciones que se establecen más adelante corresponderá:

$$\phi Mn_t = \phi\rho_t f_y (1 - 0.59\rho_t \frac{f_y}{f'_c}) bd_t^2$$

En donde ϕ= coeficiente de reducción de resistencia.

En la tabla siguiente se encuentran los valores de ρ_t para los materiales de concreto y acero de refuerzo más usuales en el medio colombiano y correspondiente a la deformación unitaria neta límite de tracción de 0.005 del acero de refuerzo en secciones controladas por tracción.

		$f'_c = 17.6$ $\beta_1 = 0.85$	$f'_c = 21.1$ $\beta_1 = 0.85$	$f'_c = 24.6$ $\beta_1 = 0.85$	$f'_c = 28.1$ $\beta_1 = 0.85$	$f'_c = 31.6$ $\beta_1 = 0.82$	$f'_c = 35.2$ $\beta_1 = 0.80$	$f'_c = 42.2$ $\beta_1 = 0.75$
ρ_t	$f_y = 240MPa$	0.01988	0.02384	0.02779	0.03175	0.03444	0.03743	0.04207
	$f_y = 420MPa$	0.01136	0.01362	0.01588	0.01814	0.01968	0.02139	0.02404

Refuerzo Máximo para Miembros en Flexión

El Reglamento NSR-10 define el refuerzo máximo que puede usarse en una sección de concreto reforzado con solo armadura a la tracción, como una

función de la deformación unitaria neta de tracción en el acero en tracción ε_t, en lugar de la relación ρ/ρ_b que se usaba en la NSR-98. La relación entre ρ y ε_t se puede obtener a partir de la figura adjunta:

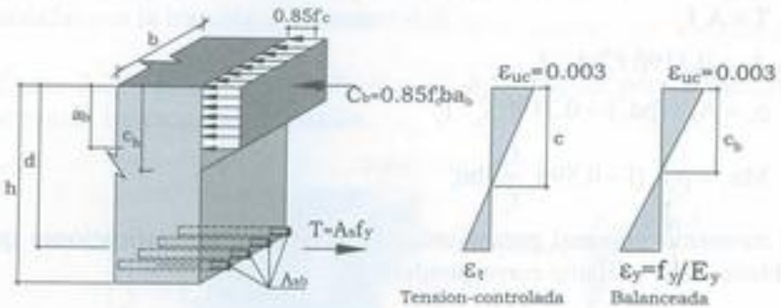


Figura 2.30

A partir de la figura 2.30 y para la sección balanceada:

$$c_b = \frac{a_b}{\beta_1} = \frac{\rho_b f_y d}{0.85 f'_c \beta_1} \qquad y \qquad c = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c \beta_1}$$

$$y \quad \frac{c}{c_b} = \frac{\rho}{\rho_b} \qquad \text{dividiendo por} \qquad d: \frac{c}{d} = \frac{\rho}{\rho_b} \times \frac{c_b}{d}$$

De los triángulos:

$$\frac{c}{d} = \frac{0.003}{0.003 + \varepsilon_t} \qquad y \qquad \varepsilon_t = \frac{0.003}{c/d} - 0.003$$

igualmente:

$$\frac{c_b}{d} = \frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{E_s}} \qquad \therefore \qquad \frac{c}{d} = \frac{\rho}{\rho_b}\frac{c_b}{d} = \frac{\rho}{\rho_b}\frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{E_s}}$$

$$\text{si} \quad \varepsilon_t = \frac{0.003}{c/d} - 0.003 = \left[\frac{0.003 + \frac{f_y}{E_s}}{\frac{\rho}{\rho_b}}\right] - 0.003$$

Para $f_y = 420\text{MPa}$ y $E_s = 200.000\text{MPa}$ y $f_y/E_s = 0.0021$

$$\varepsilon_t = \left(\frac{0.0051}{\rho/\rho_b}\right) - 0.003$$

El Reglamento NSR-10 limita el esfuerzo máximo para miembros en flexión (con carga axial mayorada menor a $0.10 f'_c A_g$) como el que corresponde a un valor de la deformación unitaria neta de tracción en el acero en tracción ε_t no menor a 0.004 en el estado de resistencia nominal.

Con este límite, la cuantía de refuerzo en vigas no pre-esforzadas se mantiene muy cercana al valor que se exigía en la NSR-98. Si en la expresión anterior utilizamos $\rho_{max} = 0.75\rho_b$ obtenemos una deformación unitaria neta de tracción en el acero para el estado de resistencia nominal de 0.0038, por lo que concluimos que el límite actual es levemente mas conservador.

Para la limitación de $\varepsilon_t = 0.004$, la ecuación general de ε_t sería:

$$\frac{\rho}{\rho_b} = \frac{0.003 + f_y/E_s}{0.007} \qquad \text{y para} \qquad f_y = 420\text{MPa}$$

$$\rho = \left(\frac{0.003 + 0.0021}{0.007}\right)\rho_b = 0.729\rho_b \qquad \text{y para este caso:}$$

$$\phi = 0.65 + (\varepsilon_t - 0.002)(250/3)$$

véase CR9.3.2.2 del Reglamento Colombiano

$\phi = 0.817 < 0.90$

Por lo tanto consideramos más apropiado trabajar con la deformación unitaria neta de tracción ε_t limitándola a un valor mínimo de 0.005, aun cuando la norma permite mayores cantidades de refuerzo con deformaciones unitarias netas de tracción menores. Cualquier aumento en la resistencia con cantidades mayores de refuerzo se anula con la reducción de coeficiente de resistencia ϕ y se confirma más apropiado el diseño para secciones controladas por tracción.

Factor de seguridad

Para acometer el diseño a partir del momento último resistente de una sección, es evidente que se pretende que dicho momento no se presente, colocándose un factor de seguridad apropiado. El Reglamento NSR-10 especifica un factor de seguridad obtenido de una parte, aumentando las cargas o los momentos que ellas producen por medio de los llamados "factores o coeficientes de carga (U)" y por otra parte disminuyendo la resistencia de las secciones por medio de los denominados "factores o coeficientes de reducción de resistencia (ϕ)".

Factor de coeficiente de carga (U)

Es un factor de seguridad con respecto a las cargas actuantes. El titulo B del Reglamento NSR-10 lo define como "un coeficiente que tiene en cuenta las desviaciones inevitables de las cargas reales con respecto a las cargas nominales y las incertidumbres que se tienen en el análisis estructural al transformar las cargas en efectos internos de los elementos, y por la probabilidad de que más de una carga extrema ocurra simultáneamente". Una carga mayorada es, por consiguiente, la carga resultante de multiplicar la carga nominal por un factor o coeficiente de carga.

En consecuencia el requisito básico para el diseño por resistencia se expresa así:

Resistencia de diseño ≥ Resistencia requerida

ϕ *Resistencia nominal ≥ U

y debe investigarse el efecto de uno o más cargas que no actúan simultáneamente.

A continuación transcribimos las combinaciones de carga mínimas mas usables especificadas por el Reglamento NSR-10 para obtener la resistencia requerida U, la cual, como se expreso antes, debe ser por lo menos igual al efecto de las cargas mayoradas.

1. U = 1.4D, en donde:

   D = carga muerta o los momentos y fuerzas internas correspondientes.

2. U = 1.2D+1.6L+0.5(L_r ó G ó L_e), en donde:

   L = cargas vivas o momentos y fuerzas internas correspondientes.

   L_r = cargas vivas de cubierta o momento y fuerzas internas correspondientes.

   G = cargas por granizo o momentos y fuerzas internas correspondientes.

   L_e = cargas por empozamiento de agua o momentos y fuerzas internas correspondientes

3. U = 1.2D+1.6(L_r ó G ó L_e)+(1.0L ó 0.5W) en donde:

   W = cargas por viento o momentos y fuerzas internas correspondientes.

4. U = 1.2D+1.0W+1.0L+0.5(L_r ó G ó L_e)

5. U = 1.2D+1.0E+1.0L en donde:

   E = efectos de carga producidos por el sismo o momentos y fuerzas internas correspondientes.

6. U = 0.9D+1.6W

7. U = 0.9D+1.0E

Se permite reducir en 0.5 el factor de cargo viva L en las ecuaciones de la No 3 a No 5, excepto para estacionamientos, áreas ocupadas como lugares de reuniones públicas y en todas las áreas donde L sea superior a 4.8 kN/m^2

Las fuerzas sísmicas reducidas de diseño, E, utilizadas en las combinaciones No 5 a No 7 corresponden al efecto expresado en términos de fuerza, Fs; de los movimientos sísmicos de diseño prescrito en el titulo A, dividida por R(E=Fs/R). Cuando se trata de diseñar los miembros, el valor del coeficiente de carga que afecta las fuerzas sísmicas, E, es 1.0, dado que estas están prescritas al nivel de resistencia. Para la verificación de las derivas obtenidas de las deflexiones horizontales causadas por el sismo de diseño, deben utilizarse los requisitos del capítulo A.6, los cuales exigen que las derivas se verifiquen para las fuerzas sísmicas, Fs, sin haber sido divididas por R. En las mismas ecuaciones No 5 a No 7 se pueden usar 1.4E en lugar de 1.0E cuando los efectos de carga por sismos E se basen en los niveles de servicio de las fuerzas sísmicas.

Nota:

1. En todos los casos se debe utilizar el resultado más desfavorable y en ningún caso se trabajará con un "U" inferior al utilizando para cargas verticales.

2. Para trabajar en las condiciones especificas del medio en el cual se diseñará y construirá la estructura, el diseñador puede escoger desde los factores anteriores hasta otros ligeramente superiores según su criterio.

Factor o Coeficiente de Reducción de Resistencia ϕ

Es un coeficiente que reduce la capacidad de la sección para tener en cuenta la probabilidad de existencia de elementos con una resistencia baja debido a variaciones en la resistencia de los materiales y las dimensiones, las aproximaciones en las ecuaciones de diseño que reflejan el grado de ductilidad y confiabilidad requerida para el elemento sometido a la carga que le corresponde y para tener en cuenta la importancia del elemento en la estructura. Por lo tanto, la resistencia de diseño que tiene un elemento, sus conexiones con otros miembros y cualquier parte o sección de el, en términos de momento flector, carga axial, cortante y torsión, debe ser igual a su resistencia nominal calculada de acuerdo con los requisitos y suposiciones del título C del Reglamento NSR-10 multiplicada por un coeficiente de reducción de resistencia ϕ:

Resistencia de diseño = ϕ Resistencia nominal ≥ Resistencia requerida.

El factor de reducción de resistencia ϕ para el presente capitulo, será 0.90. Por tanto, el factor de seguridad resultante será:

$$F.S. = \frac{U}{\phi}$$

que para el caso de U=1.5 para cargas verticales en estructuras de tipo corriente resulta de 1.7, que puede considerarse aceptable para nuestro medio, en términos generales.

Expresiones para el cálculo y su tabulación

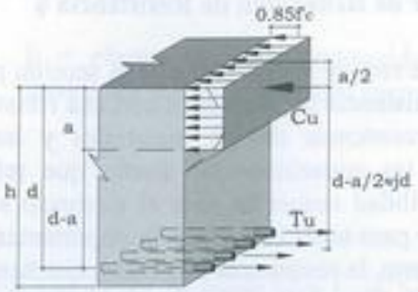


Figura 2.31

Notación:
- M = Momento de flexión o momento actuante
- U = Coeficiente de carga
- ϕM_n = Momento actuante último o momento de diseño
- M_n = Momento de falla a la resistencia última o momento Nominal
- ϕ = Coeficiente de reducción

Luego: $\phi M_n = M_u = U \cdot M$

$\phi M_n = \phi \rho f_y \left(1 - 0.59 \frac{\rho f_y}{f'_c}\right) bd^2$, expresión a partir de la cual se calcula la cuantía del refuerzo ρ en función del momento actuante último, de los materiales f_y y f'_c y de la sección bd, por lo cual se constituye en un sencillo programa de diseño.

Esta expresión también puede escribirse:

$\phi M_n = Kbd^2$, en donde $K = \phi \rho f_y \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c}\right)$ es tabulable en función de ρ

De aquí: $d = \frac{1}{\sqrt{K}} \sqrt{\frac{\phi M_n}{b}} = k2 \sqrt{\frac{\phi M_n}{b}}$, en donde el valor de k2 es igualmente tabulable.

Expresando ϕM_n en función de "a":

$\phi M_n = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)$, en donde $a = \frac{\rho f_y}{0.85 f'_c} d$.

Este valor de "a" es tabulable en la forma:

$\frac{a}{d} = \frac{\rho f_y}{0.85 f'_c}$, también en función de ρ

De la figura 2.31:

$jd = d - \frac{a}{2}$, este valor de j se puede tabular en la forma de: $j = 1 - \frac{a}{2d}$

Refuerzo mínimo de elementos a flexión

En cuanto al refuerzo mínimo de elementos sometidos a flexión, dice el Reglamento NSR-10 en la sección C.10.5.1 "en toda sección de un elemento sometido a flexión cuando por análisis se requiera refuerzo de tracción, excepto lo establecido en C.10.5.2, C.10.5.3 y C.10.5.4, el A_s proporcionado no debe ser menor que el obtenido por medio de:

$$A_{s,min} = \frac{0.25\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \qquad \text{(C.10-3)}$$

pero no menor a $1.4 b_w d / f_y$

Lo establecido en el articulo C.10.5.2 es que "para los elementos estáticamente determinados con el ala en tracción, $A_{s,min}$ no deberá ser menor que el valor dado por la ecuación (C.10-3) reemplazando b_w por $2b_w$, o el ancho del ala, el que sea menor".

Respecto del articulo C.10.5.3 dice "los requisitos de C.10.5.1 y C.10.5.2 no necesitan ser aplicados si en cada sección de A_s proporcionado es al menos un tercio superior al requerido por análisis".

En el C.10.5.4 dice "para losas estructurales y zapatas de espesor uniforme, $A_{s,min}$ en la dirección de la luz debe ser el mismo requerido por C.7.12.2.1. El espaciamiento máximo de este refuerzo no debe exceder tres veces el espesor, ni 450 mm".

Distribución de refuerzo a flexión en vigas

Con el propósito de limitar el agrietamiento por flexión en vigas el refuerzo de tracción por flexión debe distribuirse adecuadamente dentro de la zona de tracción máxima a flexión de la sección transversal de un elemento de acuerdo a los requerimientos del Reglamento en el articulo C.10.6.4 que dice: "el espaciamiento del refuerzo más cercano a una superficie en tracción, s en mm, no debe ser mayor que el dado por:

$$s = 380\left(\frac{280}{f_s}\right) - 2.5c_c \qquad \text{(C.10-4)}$$

pero no mayor que $300(280/f_s)$, donde c_c en mm, es la menor distancia desde la superficie del refuerzo o acero de pre-esforzado a la cara en tracción. Si el refuerzo mas cercano a la cara en tracción extrema corresponde a una sola barra o un solo alambre, el valor de s a utilizar en la ecuación (C.10-4) es el ancho de la cara en tracción extrema.
El esfuerzo calculado f_s(MPa) en el refuerzo más cercano a la cara en tracción para cargas de servicio debe obtenerse con base en el momento no mayorado. Se permite tomar f_s como $2/3 f_y$ ".

Problema 2.12

Diseñar la armadura necesaria a la flexión en una viga de 0.30 x 0.50 m, simplemente apoyada en una luz de 8 metros, armada en concreto de

f'_c = 21.1 MPa y acero para f_y = 240 MPa y una carga total de 8.96 kN/m (Nótese que esta carga es la obtenida como soportada en condiciones de seguridad por la viga del problema 2.1, de sección, luz, tipo de carga, condiciones de apoyo y materiales idénticos a este problema, cuando la sección estaba reforzada con 4 ϕ 7/8").

Solución
Se trata de obtener una carga última y un momento actuante último a partir del cual se obtiene ρ.

1) Obtención de w_u, F. de S. y ϕM_n:

La aplicación del coeficiente de carga U = 1.2D + 1.6L implica el conocimiento de las porciones de carga total que corresponden a carga muerta y carga viva. Del problema 2.1, se obtiene:

$$w_u = 1.2 \times 3.6 + 1.6 \times 5.36 = 12.90 \text{ kN/m}$$

$$\text{U (coeficiente de carga ponderado)} = \frac{12.90}{8.96} = 1.44$$

$$\text{Factor de Seguridad (F. de S.)} = \frac{1.44}{0.9} = 1.60$$

$$\phi M_n = \frac{12.90 * 8^2}{8} = 103.20 \text{ kN·m}$$

2) Armadura: Usando las fórmulas o la calculadora programada:

$$\phi M_n = \phi \rho f_y \left(1 - 0.59\rho \frac{f_y}{f'_c}\right) bd^2$$

$$\therefore 103.20 = 0.9 * \rho * 240000\left(1 - 0.59 * \rho * \frac{240000}{21100}\right) * 0.30 * 0.44^2$$

$$\therefore \quad \rho^2 - 0.149011\rho + 0.001226 = 0$$

de donde se escoge:

$$\rho = 0.00874 \quad \therefore \quad A_s = 0.00874*300*440 = 1154 \text{ mm}^2$$

Resulta inferior al valor de la ρ para el caso de la deformación unitaria neta limite de tracción.

La solución por tablas a partir de ϕM_n :

$$K = \frac{\phi M_n}{bd^2} = \frac{103.20}{0.30*0.44^2} = 1776.90 \therefore \rho \text{ (por interpolación)} = 0.00874$$

$A_s = 0.008740*300*440 = 1154 \text{ mm}^2$, obteniéndose el mismo resultado

Se coloca 3 ϕ 7/8" (As= 1161 mm^2) usando ϕ 7/8" para comparación, que es inferior en una barra a las cuatro necesarias por el método elástico. Una de las razones de esta diferencia es el factor de seguridad que aquí es de 1.60 y en el método elástico el factor de seguridad se asume por encima de 2.0. Esto se confirma si se diseña el problema anterior para un factor de seguridad de 2.0, es decir, coeficiente de carga de 1.8:

$$\phi M_n = \frac{8.96*8^2}{8}*1.8 = 129.02 \text{ kN·m}$$

$$K = \frac{\phi M_n}{bd^2} = \frac{129.02}{0.30*0.44^2} = 2221.4 \therefore \rho \text{ (por interpolación)} = 0.11114$$

$A_s = 0.011114*300*440 = 1467 \text{ mm}^2$, que todavía nos resulta por debajo de las cuatro barras de ϕ 7/8", pero que sin embargo las podríamos colocar en una acomodación del refuerzo por exceso.

Problema 2.13

Revisar el diseño a flexión para momento máximo en el centro de la luz de 8 metros de una viga simplemente apoyada sometida a carga uniforme, con materiales y refuerzo como aparece en la sección adjunta, determinando su momento resistente último de diseño, la carga w en kN/m que puede soportar cuando el factor de seguridad sea de 2.0 y cuál sería el factor de seguridad resultante si consideramos que la carga total actuante es de 8.96 kN/m, obtenida en el problema 2.1 como soportada en condiciones de seguridad por una viga similar de acuerdo con un diseño por el método elástico.

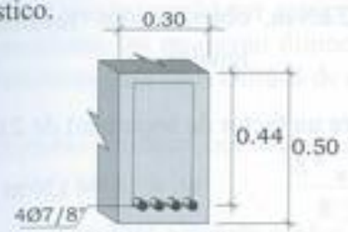


Figura 2.32

Concreto: $f'_c = 21.1$ MPa
Refuerzo: $f_y = 240$ MPa

Solución

Se trata de obtener el momento resistente último de diseño a partir de la cuantía ρ existente, luego, la carga a soportar para un factor de seguridad suministrado y, finalmente, el factor de seguridad cuando la carga w es suministrada como segura en un diseño elástico, obteniéndose así el factor de seguridad de este método para el problema antes citado.

1) Obtención de ρ :

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{4*387}{300*440} = 0.011727$$

2) Obtención de ϕM_n :

A partir de las fórmulas:

$\phi M_n = \phi A_s f_y (d - a/2)$, en donde:

$$a = \frac{\rho f_y}{0.85 f'_c} d = \frac{0.011727 * 240}{0.85 * 21.1} * 440 = 69.1 \text{ mm}$$

$$\phi M_n = 0.9 * 4 * 0.000387 * 240000 * (0.44 - 0.06910/2) = 135.57 \text{kN.m}$$

A partir de las tablas:

$\phi M_n = Kbd^2$ para K correspondiente a $\rho = 0.011727$

$\phi M_n = 2333.4 * 0.30 * 0.44^2 = 135.52$ kN·m, obteniéndose resultados iguales.

3) Carga w en kN/m que puede soportar para un factor de seguridad de 2.0:

$$\phi M_n = 135.57 \text{ kN·m} = \frac{w_u \ell^2}{8} = \frac{w_u * 8^2}{8} \quad \therefore \quad w_u = 16.94 \text{ kN/m}$$

Si el factor de seguridad es 2.0; U = 2.0*0.9 = 1.8

$w = \frac{16.94}{1.8} = 9.41$ kN/m, concluyéndose que el resultado obtenido en el problema 2.1 implica un factor de seguridad por encima de 2.0.

4) Factor de Seguridad para una carga total actuante de 8.96 kN/m:

Si $w_u = 16.94$ kN/m, entonces $U = \frac{16.94}{8.96} = 1.89$ y

F de S $= \frac{1.89}{0.9} = 2.10$ que sería el correspondiente al diseño por el método elástico en el problema 2.1.

Problema 2.14

Diseñar la armadura necesaria a flexión en una viga de 0.30 x 0.50 m, simplemente apoyada en una luz de 8 metros, armada en concreto de $f'_c = 21.1$ MPa y acero para $f_y = 240$ MPa y como alternativa para $f_y = 420$ MPa, si soporta una carga uniforme total de 10 kN/m, de la cual el 80% es carga muerta y el 20% es carga viva.

Solución

Se trata de obtener un momento actuante y, con un factor de carga, que el diseñador puede considerar apropiado para las condiciones específicas de este problema, un momento último de diseño, a partir del cual obtenemos las armaduras para cada calidad de acero.

1) Momento actuante, coeficiente de carga y momento último de diseño:

$$\text{Momento actuante} = M = \frac{w\ell^2}{8} = \frac{10 * 8^2}{8} = 80 \text{ kN·m}$$

Utilizando un coeficiente de carga U = 1.4D + 1.8L, resulta:

$w_u = 1.4 * 0.80 * 10 + 1.8 * 0.20 * 10 = 14.8$ kN/m

$U = \frac{14.8}{10} = 1.48$ muy aproximado al factor de carga conjunto recomendado arriba de 1.5 (D + L).

$\therefore \quad \phi M_n = 1.48 * 80 = 118.4$ kN·m

2) Armaduras: Se pueden obtener por la aplicación del programa

$\phi M_n = \phi \rho f_y \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c}\right) bd^2$ con ρ en función de ϕM_n o por intermedio de la tabulación efectuada para esta misma expresión. Así:

a) Utilizando $f_y = 240$ MPa:

$$K = \frac{\phi M_n}{bd^2} = \frac{118.4}{0.30*0.44^2} = 2038.6; \quad \rho = 0.010127$$

$A_s = 0.010127*300*440 = 1337\ mm^2 \sim 2\phi 7/8" + 2\phi 3/4"$.
Esta armadura, también principalmente por la disminución en el factor de seguridad, resulta inferior a la obtenida por el método elástico en el problema 2.4 parte "a".

b) Utilizando $f_y = 420$ MPa :

A partir de $K = \frac{118.4}{0.30*0.45^2} = 1949.0$ se obtiene

$\rho = 0.005516$

que también en este caso resulta inferior a la cuantía correspondiente a la deformación unitaria neta limite de tracción.

$A_s = 0.005516*300*450 = 745\ mm^2 \sim 2\phi 3/4" + 1\phi 5/8"$, armadura inferior a la obtenida con el acero de baja resistencia utilizado en "a", por lo que el cambio en la calidad del acero de baja a alta resistencia puede representar una solución a la acomodación del refuerzo en secciones muy congestionadas.

También por el método de la resistencia última existe, en ocasiones, la imposibilidad de aumentar las dimensiones de secciones sometidas a momentos flectores últimos o de diseño mayores que los resistidos por la sección, teniéndose que usar una armadura en la zona de compresiones que implica una armadura adicional a tracción, produciendo entonces las denominadas vigas con armadura a compresión. Sin embargo, hay casos de uso de la armadura en la zona de compresión sin que se tenga razones de resistencia, como cuando con esta armadura se pretende reducir las flechas por fluencia lenta o retracción de fraguado o cuando tal armadura se usa para el sostenimiento de estribos. A continuación las relaciones para el diseño de las vigas con armadura a compresión, también llamadas vigas con armadura doble, por el método de la resistencia última.

VIGAS RECTANGULARES CON ARMADURA A TRACCION Y A COMPRESION

Se trata de obtener una expresión de momento resistente último para vigas rectangulares sometidas a flexión con armadura a tracción y a compresión, también conocidas simplemente como vigas con armadura a compresión o vigas doblemente armadas, según la teoría de la resistencia última, complementando con los requerimientos del Reglamento NSR-10.

El refuerzo a compresión se usa cuando la sección está limitada a unas dimensiones determinadas por requisito del proyecto del cual hace parte. Otra posibilidad de uso de este refuerzo es cuando se requiere reducir las deflexiones a largo plazo y también en el caso en que se necesite sostener los estribos o flejes determinados por el diseño para fuerzas de corte.

Aun cuando se pueda considerar los casos en el diseño de estas secciones según que el refuerzo a compresión este o no en su límite elástico, trataremos en este texto solamente el caso más usual que corresponde a la consideración del refuerzo a compresión en el límite elástico.

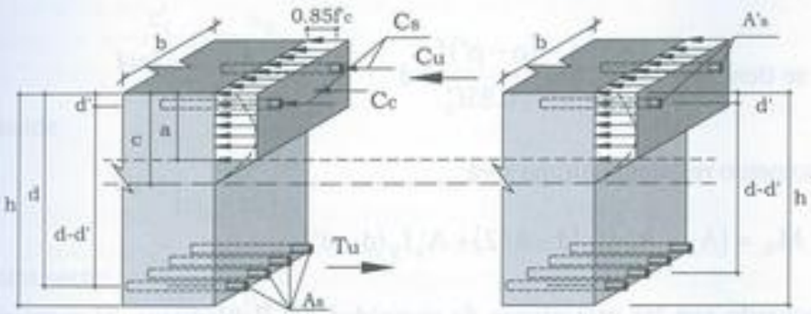


Figura 2.33

Llamando: A_s = Area total del acero en tracción

A'_s = Area del acero en compresión

$A_s - A'_s$ = Armadura a tracción correspondiente a la compresión en el concreto.

A partir de la consideración de que tanto A_s como A'_s llegan a su límite elástico en el instante de la falla, se plantea:

M_n = momento resistente último o de falla = $M_{n1} + M_{n2}$, en donde:

$M_{n1} = (A_s - A'_s) * f_y * (d - a/2)$, que es la parte del momento desarrollado por la armadura a tracción $(A_s - A'_s)$ y la compresión en el concreto.

$M_{n2} = A'_s * f_y * (d - d')$, que es la parte del momento desarrollado por las fuerzas en la armadura a compresión y un área igual de la armadura a tracción.

Si se llama: $\rho = \dfrac{A_s}{bd}$ y $\rho' = \dfrac{A'_s}{bd}$

se tiene que: $a = \dfrac{(\rho - \rho')f_y}{0.85f'_c} d$

El momento resistente último será:

$$M_n = (A_s - A'_s)f_y(d - a/2) + A'_s f_y(d - d')$$

De acuerdo con las provisiones de seguridad del Reglamento, el momento de diseño:

$$\phi M_n = \phi\{(A_s - A'_s)f_y(d - a/2) + A'_s f_y(d - d')\}$$

Todo el desarrollo se basa en la hipótesis de que tanto el refuerzo a tracción como el refuerzo a compresión alcancen su límite elástico en el instante de

la falla, para lo cual se especifica $\rho - \rho' = \dfrac{A_s - A'_s}{bd} \le \rho_t$ o ρ_{max} y corresponde a la deformación unitaria neta límite de tracción de 0.005 del refuerzo en secciones controladas por tracción.

Por otra parte $\rho - \rho' \ge (\rho - \rho')_{min}$ que deducimos a partir del diagrama de deformaciones últimas en el instante de falla:

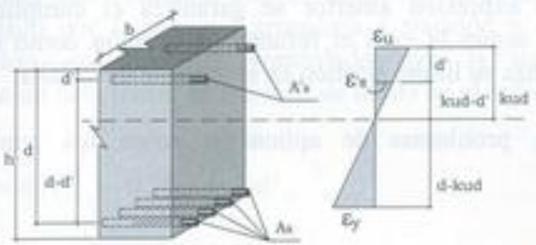


Figura 2.34

En el cual:

$$\frac{\varepsilon'_s}{kud - d'} = \frac{\varepsilon_u}{kud}$$

de donde:

$$ku = \frac{\varepsilon_u \quad d'}{(\varepsilon_u - \varepsilon'_s)\, d}$$

Por otra parte:

$$ku = \frac{(\rho - \rho')f_y}{0.85f'_c k_1}$$

Por tanto:

$$(\rho - \rho') = 0.85\frac{f'_c}{f_y}k_1 \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u - \varepsilon'_s}\frac{d'}{d}$$

Si en el instante de falla se hace $\varepsilon_u = 0.003$ y $\varepsilon'_s = f_y / E_s$

$$(\rho - \rho')\text{mín} = 0.85 \frac{f'_c}{f_y} k_1 \frac{600}{600 - f_y} \frac{d'}{d}$$

en donde $k_1 = \beta_1$ del Reglamento colombiano.

Por tanto, para una ρ' menor y por consiguiente un $(\rho - \rho')$ mayor que el obtenido por la expresión anterior se garantiza el cumplimiento de la hipótesis básica según la cual el refuerzo a tracción como el refuerzo a compresión alcanza su límite elástico en el instante de la falla.

A continuación, problemas de aplicación sobre los conceptos antes expuestos.

Problema 2.15

Diseñar la armadura necesaria a flexión en una viga de 0.30 x 0.50 m, simplemente apoyada en una luz de 8 metros, armada en concreto de $f'_c = 21.1$ MPa y acero para $f_y = 240$ MPa y una carga exterior de 10.72 kN/m. (Se resuelve el problema 2.10 por el método de la resistencia última, que por el método elástico requirió a tracción 4 ϕ 1" + 2 ϕ 7/8" y a compresión 3 ϕ 5/8").

Solución

Se trata de obtener un momento actuante último y dotar a la sección de un momento resistente equivalente; se trabaja con un factor de seguridad de 2.0 para hacer más comparables los resultados con los obtenidos en el problema 2.10.

1) Obtención de ϕM_n y comparación con ϕM_{n1}:

Cargas: p. propio viga: 0.30 x 0.50 x 1.00 x 24 = 3.60 kN/m
carga sobre la viga: = 10.72 kN/m
w = 14.32 kN/m

Momento actuante $= \frac{w\ell^2}{8} = \frac{14.32 * 8^2}{8} = 114.56$ kN·m

Para un factor de seguridad de 2.0 se utiliza U = 1.8

$\therefore \phi M_n = 1.8 * 114.56 = 206.21$ kN·m.

Se compara este resultado con el ϕM_{n1}, o sea, el momento máximo desarrollado por la máxima armadura a tracción y el concreto a la compresión, en secciones controladas por la tracción con una deformación neta límite de tracción de 0.005 en el refuerzo.

$$\phi M_{n1} = \phi \rho f_y \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c}\right) bd^2,$$

que para ρ máxima de diseño = 0.02384, resulta:

$$\phi M_{n1} = 0.9 * 0.02384 * 240000 * \left(1 - 0.59 * 0.02384 \frac{240000}{21100}\right) * 0.30 * 0.43^2$$

$\phi M_{n1} = 239.94$ kN·m, valor similar al obtenido por las tablas:

$\phi M_{n1} = 4325.4 * 0.30 * 0.43^2 = 239.93$ kN·m

Lo anterior significa que en la provisión a la sección de un momento resistente último igual a 206.21 kN·m, todavía se está, para el método de la resistencia, dentro del período de vigas con sólo armadura a tracción.

2) Armadura:

De acuerdo a la conclusión anterior, diseñamos esta viga con sólo armadura a la tracción, así:

$$\phi M_n = \phi\rho f_y\left(1-0.59\rho\frac{f_y}{f'_c}\right)bd^2$$

$$206.21 = 0.9*\rho*240000*\left(1-0.59\rho\frac{240000}{21100}\right)*0.30*0.43^2 \therefore$$

$$\rho = 0{,}019862$$

Igualmente, por las tablas resulta:

$$K = \frac{206.21}{0.30*0.43^2} = 3717.5;\ \rho\ \text{(interpolada)} = 0.019858$$

$$A_s = 0.019862*300*430 = 2562\ mm^2 \sim 4\phi\,1" + 2\phi\,7/8"\ (2814\ mm^2)$$

Se concluye que por el método de la resistencia última y con factor de seguridad de 2.0, el diseño de la viga del problema 2.10 sólo requiere la armadura a tracción en cantidad que se aproxima a la obtenida por el método elástico. La diferencia con la armadura a compresión se debe, principalmente, a los factores de seguridad que se usaron para cada diseño.

Problema 2.16

Diseñar la armadura necesaria a flexión en una viga de 0.30 x 0.50 m simplemente apoyada en una luz de 8 metros, utilizando concreto de $f'_c = 21.1$ MPa y acero para $f_y = 240$ MPa y una carga exterior de 21.44 kN/m. (Se destaca que esta carga es el doble de la correspondiente al problema 2.15 y cuatro veces la del problema 2.12 con miras a comparar resultados y fijar órdenes de magnitud de cargas contra luces y secciones).

Solución

Se trata de obtener un momento actuante último y dotar a la sección de un momento resistente equivalente; se mantiene el factor de seguridad de 2.0 con el fin de cotejar resultados.

1) Obtención de ϕM_n y comparación con ϕM_{n1}

Cargas: p. propio viga: $0.30*0.50*1.00*24$ = 3.60 kN/m
carga sobre la viga: = 21.44 kN/m
w = 25.04 kN/m

$$M_{actuante} = \frac{25.04*8^2}{8} = 200.32\ \text{kN·m}$$

Para un F. de S. de 2.0 se utiliza U = 1.8

$\therefore\ \phi M_n = 1.8*200.32 = 360.58$ kN·m. Se compara este resultado con ϕM_{n1}, o sea, el momento máximo desarrollado por la máxima armadura a la tracción y el concreto a compresión, en secciones controladas por la tracción con una deformación neta limite de tracción de 0.005 en el refuerzo:

$\phi M_{n1} = \phi\rho f_y\left(1-0.59\rho\frac{f_y}{f'_c}\right)bd^2$, que para ρ máxima de diseño $= 0.02384$ vale:

$$\phi M_{n1} = 0.9*0.02384*240000*\left(1-0.59*0.02384\frac{240000}{21100}\right)*0.30*0.41^2$$

$$\phi M_{n1} = 218.14\ \text{kN·m}$$

(se usa d = 0.41 m esperando una armadura superior a la del problema anterior).

Este resultado significa que en la provisión a la sección de un momento resistente último, se requiere la contribución de la armadura a compresión produciéndose un diseño de viga doblemente armada.

$$\therefore\ \phi M_{n2} = \phi M_n - \phi M_{n1} = 360.58\text{-}218.14 = 144.44\ \text{kN·m}$$

2) Armadura:

a) Armadura a tracción:

$$A_s = \rho \text{ máxima de diseño} * bd + \frac{\phi M_{n2}}{\phi f_y (d - d')}$$

$$A_s = 0.02384*0.30*0.41 + \frac{144.44}{0.90*240000*(0.41-0.06)}$$

$$A_s = 0.004843\ m^2$$

$$A_s = 4843\ mm^2$$

Refuerzo: $2\phi 1\,1/4" + 5\phi 1\,1/8" (4863 mm^2)$

Chequeo de "d":

$$d = 500 - \frac{2*819*60 + 2*645*60 + 3*645*120}{2*819 + 5*645}$$

$$d = 500 - 83.87 = 416mm - 0.41m$$

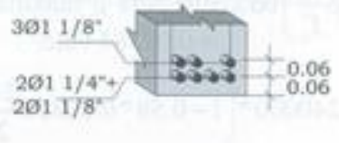


Figura 2.35

b) Armadura a la compresión:

$$A'_s = \frac{\phi M_{n2}}{\phi f_y (d - d')} = \frac{144.44}{0.9*240000*(0.41-0.06)}$$

$$A'_s = 0.001911 m^2 (1911 mm^2)$$

Algunos autores consideran que se debe aumentar el A'_s por la disminución de la misma área de concreto a compresión desalojado por el refuerzo, para lo cual plantean: $f'_s = f_y - 0.85f'_c = 240 - 0.85*21.1 =$ 222 MPa

$$\therefore \quad A'_s = \frac{144.44}{0.9*222000*(0.41-0.06)} = 0.002065 m^2 \ (2065\ mm^2)$$

Refuerzo: $3\phi 1" + 1\phi 1\,1/8" (2175 mm^2)$

c) Chequeo de cuantías:

$$\rho - \rho' = \frac{A_s - A'_s}{bd} = \frac{4863-2175}{300*410} = 0.02185 < 0.02384$$

$$(\rho - \rho')mín = \frac{0.85f'_c}{f_y}\beta_1 \frac{600}{600 - f_y}\frac{d'}{d}$$

$$(\rho - \rho')mín = \frac{0.85*21.1}{240} * 0.85 * \frac{600}{600-240} * \frac{60}{410}$$

$$(\rho - \rho')mín = 0.015493$$

Por tanto resulta: $(\rho - \rho')\,mín < (\rho - \rho') < (\rho - \rho')máx$

Nota: Esta solución puede resultar teórica en nuestro medio, entre otras razones por la posible dificultad de consecución en la actualidad de las barras en los diámetros usados para la armadura a tracción. Comparando con el problema 2.15, se observa la aproximada proporcionalidad entre la carga y la armadura a tracción correspondiente, para un mismo factor de seguridad. Finalmente, el Reglamento colombiano especifica que el refuerzo a compresión en elementos sometidos a flexión debe asegurarse mediante estribos en la misma forma que el refuerzo a compresión en columnas.

A continuación una solución al resultado calificado como teórico del problema anterior, consistente en reemplazar la armadura de baja resistencia por armadura de alta resistencia que permita utilizar diámetros inferiores de normal ocurrencia y que además muestre al lector la justificación de este tipo de refuerzo como solución a secciones congestionadas.

Problema 2.17

Diseñar la viga del problema 2.16 utilizando acero para f_y = 420 MPa y el mismo factor de seguridad.

Solución

Para el mismo factor de seguridad y momento actuante último ϕM_n = 360.58 kN·m, comparamos con el ϕM_{n1} obtenido para las nuevas condiciones de los materiales y se colocan a continuación las armaduras por un proceso similar al utilizado en el problema anterior.

1) Obtención de ϕM_{n1} y ϕM_{n2}:

$$\phi M_{n1} = \phi\rho f_y\left(1-0.59\rho\frac{f_y}{f'_c}\right)bd^2,$$

que para ρ máximo de diseño = 0.01362 vale:

$$\phi M_{n1} = 0.9*0.01362*420000*\left(1-0.59*0.01362*\frac{420}{21.1}\right)*0.30*0.42^2$$

$$\phi M_{n1} = 228.87\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\phi M_{n2} = \phi M_n - \phi M_{n1} = 360.58 - 228.87 = 131.71\ \text{kN·m}$$

2) Armadura:

a) Armadura a tracción:

$$A_s = (\rho\ \text{máximo de diseño})*bd + \frac{\phi M_{n2}}{\phi f_y(d-d')}$$

$$A_s = 0.01362*0.30*0.42 + \frac{131.71}{0.9*420000*(0.42-0.05)}$$

$$A_s = 0.002658\text{m}^2\ (2658\text{mm}^2)$$

Refuerzo: 3ϕ1" +3ϕ7/8" (2694 mm²)

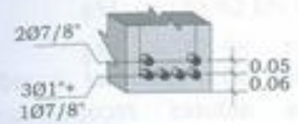


Figura 2.36

Chequeo de "d"

$$z = \frac{3*510*60+1*387*110+2*387*110}{2694}$$

$$z = 74.3$$

$$d = 500 - 74.3 = 425.7\ \text{mm} \sim 0.42\ \text{m}$$

b) Armadura a compresión: $A'_s = \dfrac{\phi M_{n2}}{\phi f'_s(d-d')}$

en donde $f'_s = f_y - 0.85f'_c = 420 - 0.85*21.1 = 402$ MPa

$$\therefore A'_s = \frac{131.71}{0.9*402000*(0.42-0.05)} = 0.000984\ \text{m}^2\ (984\ \text{mm}^2)$$

Refuerzo:3ϕ3/4"+ 1ϕ5/8" (1051 mm²)

c) Chequeo de cuantías:

$$\rho - \rho' = \frac{2694-1051}{300*420} = 0.01304 < 0.013620$$

Para la sección propuesta el valor $(\rho-\rho')$mín sugiere el cambio de la sección principalmente en lo concerniente a la altura que debe aumentarse.

$$(\rho-\rho')\text{mín} = \frac{0.85f'_c}{f_y}\beta_1\frac{600}{600-f_y}\frac{d'}{d}$$

$$\therefore (\rho-\rho')\text{mín} = \frac{0.85*21.1}{420}*0.85*\frac{600}{600-420}*\frac{50}{420} = 0.014404$$

Sin embargo como se observa en los resultados, el cambio en la calidad del acero cumpliría el objetivo propuesto.

En ocasiones se usa el acero a compresión para controlar o reducir las deflexiones a largo plazo. Algunos autores recomiendan la utilización de $(\rho-\rho')$ variable entre $0.18*(f'_c/f_y)$ para un máximo control y que no exceda la cuantía máxima de diseño, siempre y cuando el valor de $(\rho-\rho')=0.18*(f'_c/f_y)\geq(\rho-\rho')$ mínimo. La forma como opera este control consiste en que al reducir el valor de $(\rho-\rho')$, reducimos el valor de ϕM_{n1} y por consiguiente el trabajo del concreto y su deformación por fluencia lenta. A continuación se presenta un ejemplo de la utilización de este procedimiento, poco frecuente en el ejercicio profesional, con el propósito primordial de familiarizar al lector con el diseño y trabajo de las vigas con armadura a compresión.

Problema 2.18

Diseñar la armadura necesaria a flexión en el problema 2.16 con el criterio de reducir la deflexión por plastificación del concreto, adoptando una cuantía $(\rho-\rho')=0.020$, aproximadamente equidistante entre $(\rho-\rho')=0.18*(f'_c/f_y)=0.015825$ y $(\rho-\rho')\text{máx.}=0.02384$ (sin control de deflexión).

Solución

Para el mismo factor de seguridad y momento actuante último $\phi M_n = 360.58$ kN·m obtenido en el problema 2.16, y con el ϕM_{n1} ahora calculado para $(\rho-\rho')=0.020$, se calculan ϕM_{n2} y las armaduras correspondientes:

1) ϕM_{n1}, ϕM_{n2}:

$$\phi M_{n1} = 0.9*0.020*240000*\left(1-0.59*0.020*\frac{240}{21.1}\right)*0.30*0.41^2$$

$\phi M_{n1} = 188.62$ kN·m

$\phi M_{n2} = 360.58 - 188.62 = 171.96$ kN·m

2) Armadura:

a) Armadura a tracción:

$$A_s = 0.020*0.30*0.41+\frac{171.96}{0.9*240000*(0.42-0.06)} = 0.004731 \text{ m}^2$$

$A_s = 4740 \text{ mm}^2$ - Armadura: $5\phi 1\,1/4" + 1\phi 1\,1/8"(4740\text{mm}^2)$

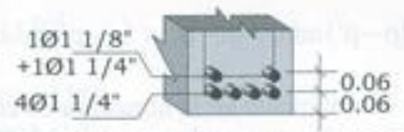


Figura 2.37

Chequeo de "d":

$$z = \frac{4*819*60+1*819*120+1*645*120}{4740} = 78.5 \text{ mm} - 80\text{mm}$$

$d = 500-80 = 420 \text{ mm} = 0.42 \text{ m}$

b) Armadura a compresión: $A'_s = \dfrac{\phi M_{n2}}{\phi f'_s(d-d')}$

$$\therefore A'_s = \frac{171.96}{0.9*222000*(0.42-0.06)} = 0.002391 \text{ m}^2 \ (2391 \text{ mm}^2)$$

Refuerzo: $3\phi 1\,\frac{1}{2}" + 1\phi 1"(2445 mm^2)$

Debe notarse el aumento en la armadura de compresión de 2040 mm^2 teóricos en el problema 2.16 a los 2445 mm^2 de ahora.

c) Chequeo de cuantías: en este caso es más obvio este chequeo que en los problemas anteriores en donde $(\rho-\rho')$ se había calculado muy cercano a $(\rho-\rho')$máx.

$$\rho-\rho'=\frac{A_s-A_s'}{bd}=\frac{4740-2445}{300*420}=0.01821<0.020$$

por las aproximaciones en la colocación de la armadura.

Según lo expuesto antes:

$$(\rho-\rho')\text{máx}=0.02380 \text{ y } (\rho-\rho')\text{mín}=0.015493$$

Por tanto: $(\rho-\rho')$mín.$<(\rho-\rho')<(\rho-\rho')$máx.

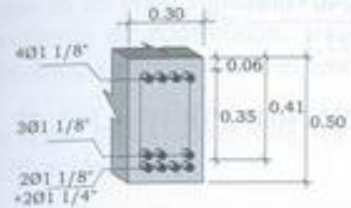
Nota: Se espera que este aumento en la armadura de compresión reduzca la deflexión por plastificación; sin embargo, la necesidad de este control dependerá de un estudio sobre las deflexiones elásticas y a largo plazo, como se verá al final del presente capítulo. Por último, se reitera la necesidad de asegurar el refuerzo a compresión mediante estribos.

Estos problemas de vigas rectangulares con armadura a compresión se finalizan con un problema de revisión de la sección, utilizando el diseño del problema 2.16 del cual se mantiene la armadura a la tracción y se modifica, aumentando, la armadura a compresión.

Problema 2.19

Revisar el diseño a flexión para momento máximo en el centro de la luz de 8 metros de una viga rectangular simplemente apoyada sometida a carga

uniforme, determinando el momento resistente último de diseño y la carga w en kN/m que puede soportar cuando el factor de seguridad es de 2.0; de acuerdo a la sección y materiales siguientes:



$f_c' = 21.1$ MPa
$f_y = 240$ MPa

Figura 2.38

Solución

Primero se verifica que $(\rho-\rho')$ esté dentro de los límites admisibles y luego obtenemos ϕM_{n2}, el cual determina a su vez el valor de ϕM_{n1} para que sumados se tenga el ϕM_n y por consiguiente la carga w.

1) Verificación de $(\rho-\rho')$:

$$(\rho-\rho')=\frac{4863-2580}{300*410}=0.018561$$

Según problema 2.16: $(\rho-\rho')$mín. = 0.015493 y
$(\rho-\rho')$máx. = 0.02384

Por tanto : $(\rho-\rho')\text{mín}<(\rho-\rho')<(\rho-\rho')\text{máx}$

2) Obtención del momento resistente último $\phi M_n = \phi M_{n1} + \phi M_{n2}$

A partir de

$$\phi M_{n2}=\phi A_s' f_y*(d-d')=0.9*0.002580*240000*(0.41-0.06)$$

$$\phi M_{n2}=195.05 kN.m$$

se obtiene $\phi M_{n1} = \phi(A_s - A'_s)\, f_y\,(d - a/2)$, o sea, el resto de armadura de tracción trabajando con el concreto para producir este momento.

Aquí: $a = \dfrac{(\rho-\rho')\, f_y}{0.85 f'_c} d = \dfrac{0.018561 * 240 * 0.41}{0.85 * 21.1} = 0.102$ m

$\therefore \phi M_{n_1} = 0.9 * (0.004863 - 0.002580) * 240000 * (0.41 - 0.102/2)$

$\phi M_{n1} = 177.03$ kN·m

Otra forma de obtener ϕM_{n1} es:

$$\phi M_{n1} = \phi(\rho-\rho')\, f_y * \left(1 - 0.59 * (\rho-\rho') \frac{f_y}{f'_c}\right) bd^2$$

donde $(\rho-\rho') = 0.018561$, reemplazando:

$$\phi M_{n1} = 0.9 * 0.018561 * 240000 * \left(1 - 0.59 * 0.018561 * \frac{240}{21.1}\right) * 0.30 * 0.41^2$$

$\phi M_{n1} = 177.0$ kN·m

$\therefore$ $\phi M_n = 177.03 + 195.05 = 372.08$ kN·m que se aproxima al momento último $\phi M_n = 360.58$ kN·m del problema 2.16 concluyendo que el aumento en la armadura de compresión no implica un aumento en la resistencia de la sección; se usa en este caso como disminución en el trabajo del concreto y por consiguiente en la disminución de su deformación por fluencia lenta.

3) Obtención de w_u y w:

$$\phi M_n = \frac{w_u \ell^2}{8} = \frac{w_u * 8^2}{8} = 372.08 \text{ kN·m} \qquad \therefore \quad w_u = 46.51 \text{ kN/m}$$

Si F. de S. = 2.0 entonces U = 1.8 $\quad \therefore \quad w = 46.51/1.8$

$\therefore \quad w = 25.84$ kN/m

que es un poco superior a 25.04 kN/m debido no solo al aumento del refuerzo de compresión, sino al exceso de refuerzo colocado en el problema original sobre el teórico requerido.

Nota: Para casos como éste, es que resulta obvia la aplicación de la especificación:

$(\rho-\rho')\text{mín.} < (\rho-\rho') < (\rho-\rho')\text{máx.}$

Una de las construcciones más frecuentes en estructuras de concreto son las llamadas losas aligeradas o nervadas, que cuando no son prefabricadas, están constituidas por sistemas monolíticos de vigas "T" en los cuales la aleta es la losa de piso y los nervios son la parte central de la viga "T".
A continuación, se estudian las relaciones de diseño y especificaciones de las denominadas vigas "T".

Vigas "T"

Se deben obtener las expresiones de momento resistente último para vigas "T" sometidas a flexión con armadura a tracción, según la teoría de la resistencia última, complementando con las limitaciones de cuantía para el diseño según la Reglamento NSR-10.

Antes de obtener el momento resistente último para secciones en "T", debemos conocer las especificaciones del Reglamento sobre las mismas.

a) Para vigas con losa de ambos lados del cuerpo central o nervio y que hacen parte de un sistema monolítico de losa a base de vigas "T":

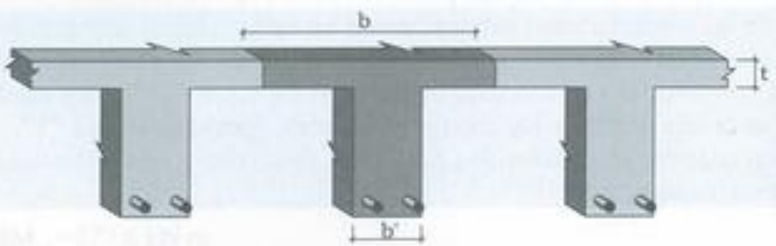


Figura 2.39

El ancho efectivo "b" no debe exceder 1/4 de la longitud de la viga:

$b \leq 1/4$ longitud de la viga

El ancho de aleta que se proyecta a cada lado del cuerpo central no debe exceder 8 veces el espesor de la aleta "t"; en términos de b':

$b \leq 16t + b'$

El ancho de aleta que se proyecta a cada lado del cuerpo central no debe exceder la mitad de la distancia hasta el siguiente cuerpo central; en términos de b':

$b \leq$ a la separación centro a centro de vigas adyacentes

b) Para vigas con losa de un solo lado del cuerpo central o nervio y que hacen parte de un sistema monolítico de losa a base de vigas "T":

El ancho efectivo de aleta que se proyecta al lado del cuerpo central no debe exceder 1/12 de la longitud de la viga; en términos de "b":

$b \leq 1/12$ longitud de la viga + b'

Tampoco debe exceder 6 veces el espesor de la aleta; en términos de b':

$b \leq 6t + b'$

Y tampoco debe exceder la mitad de la distancia hasta el siguiente cuerpo central; en términos de b';

$b \leq 1/2$ de la distancia libre hasta la siguiente viga + b'

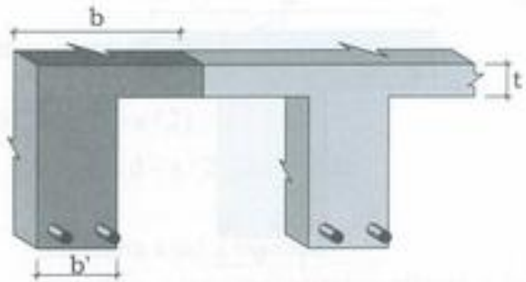


Figura 2.40

c) Para vigas "T" aisladas, en las cuales la forma "T" se usa para proporcionar un área adicional de compresión, se debe tener un espesor de aleta no menor que la mitad del ancho del alma, $t \geq \frac{1}{2} b'$ y un ancho efectivo de ala no mayor que cuatro veces el ancho del alma, $b \leq 4b'$.

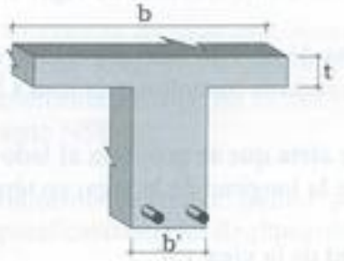


Figura 2.41

Para el estudio de su momento resistente último, se está ante dos casos:

a) Si la profundidad del bloque de compresiones y el eje neutro quedan dentro de la aleta, la sección puede estudiarse como una sección rectangular de dimensiones b y d.

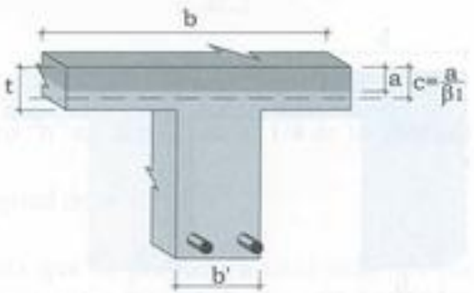


Figura 2.42

b) Si la profundidad del eje neutro es superior al espesor de la aleta y queda dentro del nervio:

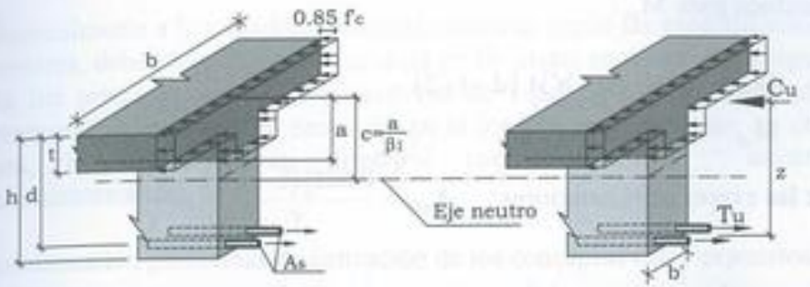


Figura 2.43

En este caso, el momento resistente último o de falla se compone de dos momentos:

$M_u = M_{uw} + M_{uf}$, en donde:

M_{uw} = momento resistente último de la zona del nervio
M_{uf} = momento resistente último de la zona de aletas

los cuales podemos cuantificar separadamente así:

$$M_{uw} = 0.85 f'_c\, ab' \left(d - a/2\right)$$

$M_{uw} = \left(A_s - A_{sf}\right) f_y \left(d - a/2\right)$, en donde:

A_s = armadura total a tracción.
A_{sf} = armadura a tracción correspondiente a la compresión en las aletas.
$A_s - A_{sf}$ = armadura a tracción correspondiente a la compresión en la zona del nervio.

De las expresiones anteriores: $A_s - A_{sf} = \dfrac{0.85 f'_c ab'}{f_y} = \dfrac{C_{uw}}{f_y}$

También para M_{nf}:

$$M_{nf} = 0.85f'_c\,(b-b')t\,(d-t/2)$$
$$M_{nf} = A_{sf}\,f_y\,(d-t/2)$$

De las expresiones anteriores: $A_{sf} = \dfrac{0.85f'_c(b-b')t}{f_y} = \dfrac{C_{uf}}{f_y}$

De acuerdo con las provisiones de seguridad del Reglamento colombiano, el momento de diseño es:

$\phi M_n = \phi M_{nw} + \phi M_{nf}$, es decir:

$$\phi M_n = \phi 0.85f'_c\left\{ab'(d-a/2)+(b-b')t\,(d-t/2)\right\} \qquad \text{y}$$

$$\phi M_n = \phi\left\{(A_s - A_{sf})f_y(d-a/2)+A_{sf}f_y(d-t/2)\right\}$$

También en estas vigas "T" es necesario garantizar que la armadura a tracción estará en fluencia antes de la falla del concreto a compresión. Por lo tanto, si se llama:

$\rho = \dfrac{A_s}{b'd}$ y $\rho_f = \dfrac{A_{sf}}{b'd}$, tendremos que:

Para tener un margen de seguridad contra la falla del concreto en compresión el Reglamento Colombiano especifica: $\rho_{max} = \rho_{t\,max}$ para $\rho_w + \rho_{max}$ para ρ_f. Esto es que la ρ_{max} no debe exceder a la correspondiente a la deformación unitaria para el límite de tracción de 0.005 del acero de refuerzo en secciones controladas por tracción para la zona del nervio como para la zona de aletas.

ρ_{max} diseño $= \rho_t + (\rho_t/\rho_b)\,\rho_f$

Adicionalmente a la armadura principal calculada según las especificaciones anteriores, debe colocarse una armadura en las aletas en dirección ortogonal a la luz principal, que para un sistema de vigas "T" (losas aligeradas) corresponde a la armadura necesaria en la losa de recubrimiento; en otros casos, las aletas deben diseñarse como voladizos y armarlos convenientemente.

A continuación problemas de aplicación de los conceptos antes expuestos.

Problema 2.20

Diseñar la armadura necesaria a la flexión en una viga de sección "T" según la figura, simplemente apoyada en una luz de 8 metros, armada en concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero para f_y = 420 MPa, si soporta una carga total de 25.04 kN/m. (La carga es igual a la utilizada en el problema 2.17).

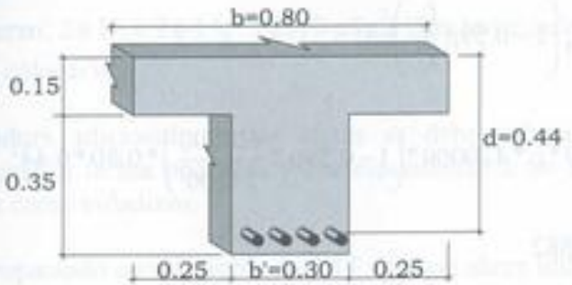


Figura 2.44

Solución

En primer lugar, se debe revisar que la sección cumpla los requisitos geométricos del Reglamento NSR-10 para su consideración como viga "T" y luego dotar la sección de un momento resistente equivalente al actuante último, usando un factor de seguridad apropiado.

1) Revisión de la "T" según el Reglamento:

b (ancho efectivo de aleta)	$\le 4b'$	$\therefore$	$b < 4*300$	= 1200 mm
t (espesor de aleta)	$\ge b'/2$	$\therefore$	$t > 300/2$	= 150 mm

2) M y ϕM_n:

$$M = \frac{w\ell^2}{8} = \frac{25.04*8^2}{8} = 200.32 \text{ kN·m};$$

para F. de S. = 1.78, correspondiente a U = 1.6

$$\therefore \phi M_n = 1.6*200.32 = 320.51 \text{ kN·m}$$

3) Comprobación de la profundidad del rectángulo de compresiones y el eje neutro, para su funcionamiento como viga rectangular:

Suponiendo una sección rectangular de ancho b = 0.80 m y altura efectiva d = 0.44 m, calculamos la cuantía necesaria ρ para el momento actuante último propuesto y en consecuencia la profundidad del rectángulo de compresiones y el eje neutro.

$$\phi M_n = \phi \rho f_y \left(1 - 0.59\rho \frac{f_y}{f'_c}\right) bd^2$$

$$320.51 = 0.9*\rho*420000*\left(1 - 0.59\rho*\frac{420000}{21100}\right)*0.80*0.44^2$$

$$\therefore \rho = 0.005882$$

Por tanto: $a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c} = \frac{0.005882*420*440}{0.85*21.1} = 60.6$ mm y

$$kud = 1.18*a = 71.5 \text{ mm}$$

Estos resultados significan que tanto la profundidad del rectángulo de compresiones, como la profundidad del eje neutro, caen dentro de la aleta, garantizando que no hay compresiones en la parte central de la viga "T" bajo la aleta y que por lo tanto se puede diseñar como viga rectangular de b = 800 mm y d = 440 mm.

En el caso de utilizar las tablas, el procedimiento sería el siguiente:

A partir de $K = \frac{320.51}{0.80*0.44^2} = 2069.4$, se interpola en la tabla correspondiente el valor de a/d = 0.1377. Por consiguiente a = 60.6 mm y kud = 71.5 mm.

En cualquier caso, se continúa el diseño como viga rectangular, calculando la armadura correspondiente, así:

4) Armadura:

Para la cuantía obtenida $\rho = 0.005882$:

$$A_s = 0.005882*800*440 = 2070 \text{ mm}^2$$

Refuerzo: 2 ϕ 1" + 2 ϕ 1 1/8" (2310 mm^2) para tener en cuenta la simetría en su colocación.

Armadura adicional: en las aletas se debe colocar una armadura ortogonal a la luz principal y correspondiente a un diseño de dichas aletas como voladizos.

Nota: Comparando con el problema 2.17, aunque ahora utilizamos un factor de seguridad un poco inferior, se puede decir que se remplaza la armadura a compresión por el concreto de las aletas y se disminuye la armadura a tracción por un aumento del brazo del par interior resistente.

Problema 2.21

Diseñar la armadura necesaria a la flexión en una viga de sección "T", que hace parte de un sistema monolítico de losa basado en vigas "T", según la figura, simplemente apoyada en una luz de 8 metros, armada en concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero para f_y = 420 MPa, si soporta una carga total de 25.04 kN/m.

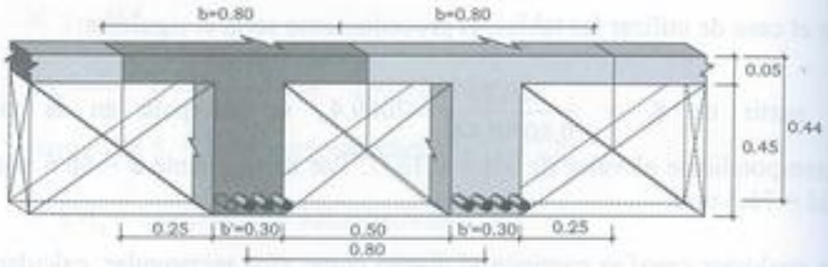


Figura 2.45

Solución

En primer lugar, se debe revisar que la sección cumpla los requisitos geométricos del Reglamento NSR-10 para su consideración del diseño como viga "T", y luego dotar la sección de un momento resistente último equivalente al actuante, usando un factor de seguridad apropiado.

1) Revisión de la "T" según el Reglamento:

b ≤ ¼ longitud de la viga = 2.00 m
b ≤ 16t + b′ = 16*0.05 + 0.30 = 1.10 m
b ≤ separación centro a centro de vigas adyacentes = 0.80 m

2) M y ϕM_n:

$$M = \frac{w\ell^2}{8} = \frac{25.04*8^2}{8} = 200.32 \text{kN.m};$$

para F.de S.=1.78, correspondiente a U = 1.6

$\therefore \phi M_n = 1.6*200.32 = 320.51$ kN-m

3) Comprobación de la profundidad del rectángulo de compresiones, para su funcionamiento como viga rectangular:

Como rutina de diseño, igual que en el problema 2.20, se supone una sección rectangular de ancho b = 0.80 m y altura útil d = 0.44 m y se calcula la cuantía necesaria ρ para el momento actuante último propuesto y, en consecuencia, la profundidad del rectángulo de compresiones y el eje neutro:

$$\phi M_n = \phi\rho f_y\left(1-0.59\rho\frac{f_y}{f'_c}\right)bd^2$$

$$320.51 = 0.9*\rho*420000*\left(1-0.59\rho*\frac{420000}{21100}\right)*0.80*0.44^2$$

$\therefore \rho = 0.005882$

Por lo tanto: $a = \frac{\rho f_y}{0.85f'_c}d = \frac{0.005882*420}{0.85*21.1}*440 = 60.6$ mm

$$kud = 1.18*a = 1.18*60.6 = 71.5 \text{ mm}$$

Estos resultados significan que la profundidad del rectángulo de compresiones y por consiguiente del eje neutro, son mayores que el espesor de la aleta. Luego el tratamiento para su diseño debe ser como viga "T".

4) Diseño como viga "T":

a) Determinación de M_{nf} y A_{sf}:

$$\phi M_{nf} = \phi*0.85f'_c(b-b')\,t\,(d-t/2)$$

$\phi M_{nf} = \phi*A_{sf}*f_y(d-t/2)$, de donde:

$$A_{sf} = \frac{0.85f'_c(b-b')\,t}{f_y} = \frac{0.85*21.1*(0.80-0.30)*0.05}{420}$$

$A_{sf} = 0.001068$ m²

$$\phi M_{nf} = 0.9*0.001068*420000*(0.44-0.05/2) = 167.54 \text{ kN·m}$$

b) Determinación de ϕM_{nw} y $(A_s - A_{sf})$:

$$\phi M_{nw} = \phi M_n - \phi M_{nf} = 320.51 - 167.54 = 152.97 \text{ kN·m}$$

Por lo tanto, para la zona central rectangular de la viga "T" se plantea:

$$\phi M_{nw} = \phi(\rho - \rho_f) f_y \left\{1 - 0.59(\rho - \rho_f)\frac{f_y}{f'_c}\right\} bd^2$$

$$152.97 = 0.9*(\rho - \rho_f)*420000*\left\{1 - 0.59*(\rho - \rho_f)*\frac{420000}{21100}\right\}*0.30*0.44^2$$

$$\therefore (\rho - \rho_f) = 0.007659 \qquad A_s - A_{sf} = 0.007659*300*440 = 1011 \text{ mm}^2$$

Armadura: $A_s = 1011+1068 = 2079 \text{ mm}^2$: $2\phi 1\frac{1}{8}" + 2\phi 1"$ (2310 mm^2) para una colocación simetrica.

c) Comprobación de $\rho < \rho$ máxima de diseño

$$\rho \text{ máx diseño} = 0.01362 + \frac{\rho_{mas}}{\rho_{balanceada}} * \frac{1068}{300*440}$$

$$\rho \text{ máx diseño} = 0.01362 + 0.625*0.008091 = 0.018677$$

$$\rho \text{ actual} = \frac{2*510+2*645}{300*440} = 0.0175 < \rho \text{ máx diseño}$$

d) Armadura adicional: se debe colocar una armadura en las aletas, ortogonal a la luz principal y correspondiente al refuerzo para repartición de cargas, retracción de fraguado y variación de temperatura de losas macizas.

Problema 2.22

Revisar el diseño a flexión para momento máximo en el centro de la luz de 8 metros de una viga "T" simplemente apoyada, sometida a carga uniforme, que hace parte de un sistema monolítico de losa basado en vigas "T", según la figura, determinando el momento resistente último de diseño y la carga w en kN/m que puede soportar cuando el factor de seguridad sea de 1.78.

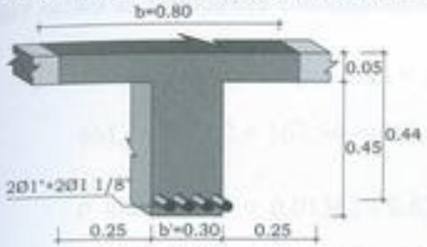


Figura 2.46

Concreto: $f'_c = 21.1$ MPa

Refuerzo: $f_y = 420$ MPa

Solución

En primer lugar, se debe revisar que la sección cumpla los requisitos geométricos del Reglamento NSR-10 para consideración como viga "T", y luego, obtener ϕM_n según su funcionamiento estructural (profundidad del eje neutro) sea como viga rectangular o como viga "T".

1) Revisión de la "T" según Reglamento: aunque esta revisión se efectuó en el problema anterior, la repetimos para fijar el concepto de hacerla rutinariamente:

$b \le$ ¼ longitud de la viga $= 2.00$ m

$b \le 16t + b' = 16*0.05 + 0.30 = 1.10$ m

$b \le$ separación centro a centro de vigas adyacentes $= 0.80$ m

2) Chequeo del comportamiento como viga rectangular de b = 0.80 m

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{2310}{800*440} = 0.006563 \text{; por lo tanto:}$$

$$a = \frac{\rho f_y}{0.85 f'_c} d = \frac{0.006563 * 420}{0.85 * 21.1} * 440 = 67.6 \text{ mm}$$

kud = 1.18*67.6 = 79.8 mm

Este resultado significa que la profundidad del rectángulo de compresiones y por consiguiente, la del eje neutro son mayores que el espesor de la aleta. Luego el funcionamiento estructural es como viga "T".

3) Determinación de ϕM_n:

a) ϕM_{nf} y A_{sf}:

$$\phi M_{nf} = \phi * 0.85 f'_c (b - b') t (d - t/2)$$

$$\phi M_{nf} = \phi * A_{sf} * f_y (d - t/2), \quad \text{de donde:}$$

$$A_{sf} = \frac{0.85 f'_c (b - b') t}{f_y} = \frac{0.85 * 21.1 * (800 - 300) * 50}{420} = 1068 \text{ mm}^2$$

$$\phi M_{nf} = 0.9 * 0.001068 * 420000 * (0.44 - 0.05/2) = 167.54 \text{ kN·m}$$

Cabe destacar que estos dos valores de A_{sf} y ϕM_{nf} son constantes para la misma sección del problema 2.21

b) ϕM_{nw} y $(A_s - A_{sf})$:

$$(A_s - A_{sf}) = 2310 - 1068 = 1242 \text{mm}^2 \therefore (\rho - \rho_f) = \frac{1242}{300 * 440} = 0.009409$$

$\phi M_{nw} = \phi (A_s - A_{sf}) f_y (d - a/2)$ en donde $a = \frac{(\rho - \rho_f) f_y}{0.85 f'_c} d$

Remplazando: $a = \frac{0.009409 * 420}{0.85 * 21.1} * 440 = 96.9$ mm

$\phi M_{nw} = 0.9 * 0.001242 * 420000 * (0.44 - 0.0864/2)$

$\phi M_{nw} = 183.82$ kN·m

c) ϕM_n y chequeo de ρ actual < ρ máxima de diseño

$\phi M_n = 183.82 + 167.54 = 351.36$ kN·m

ρ máx diseño = $0.01362 + 0.625 * \frac{1068}{300 * 440} = 0.018677$ donde

$0.625 = \rho_t / \rho_b$

ρ actual = $\frac{2310}{300 * 440} = 0.01750 < \rho$ máx diseño

4) Determinación de M y w (carga que puede soportar para F. de S. = 1.78)

Para F. de S. = 1.78 se utiliza U = 1.6

$$M = \frac{351.36}{1.6} = 219.60 \text{ kN·m} \therefore \quad w = \frac{8 * 219.60}{8^2} = 27.45 \text{ kN/m}$$

La carga w resulta un poco mayor que la carga de diseño del problema anterior, en vista de que hemos revisado para una armadura mayor que la teórica allí requerida.

Al final del problema 2.18, modelo de la utilización del acero a la compresión para reducir flechas a largo plazo, se habló sobre la necesidad de esta metodología como función de un estudio sobre las deformaciones elásticas y a largo plazo, cuyos fundamentos y aplicaciones se estudiarán en el siguiente título "Deflexiones y control de deflexiones", el cual se presenta como un anexo al presente capítulo.

DEFLEXIONES Y CONTROL DE DEFLEXIONES

El Reglamento NSR-10 en la sección C.9.5.1 dice "los elementos de concreto reforzado sometidos a flexión deben diseñarse para que tengan una rigidez adecuada con el fin de limitar cualquier deflexión que pudiese afectar adversamente la resistencia o el funcionamiento de la estructura".

Elementos reforzados en una dirección (no pre-esforzados)

El Reglamento colombiano especifica los espesores mínimos que puedan aplicarse para los elementos que no soporten o estén ligados a particiones u otro tipo de elementos que puedan sufrir daño por deflexiones sin tener que calcular deflexiones que confirmen esta hipótesis. Transcribimos la tabla C.9.5. (a) del Reglamento.

Tabla C.9.5 (a) Alturas o espesores mínimos de vigas no pre-esforzadas o losas reforzadas en una dirección a menos que se calculen las deflexiones

	Espesor mínimo, **h**			
	Simplemente apoyados	Con un Extremo continuo	Ambos Extremos continuos	En voladizos
Elementos	Elementos que **NO** soporten o estén ligados a divisiones u otro tipo de elementos susceptibles de dañarse debido a deflexiones grandes			
Losas macizas en una dirección	$\frac{\ell}{20}$	$\frac{\ell}{24}$	$\frac{\ell}{28}$	$\frac{\ell}{10}$
Vigas o losas nervadas en una dirección	$\frac{\ell}{16}$	$\frac{\ell}{18.5}$	$\frac{\ell}{21}$	$\frac{\ell}{8}$

NOTAS:
Los valores dados en esta tabla se deben usar directamente en elementos de concreto de peso normal y refuerzo grado 420 MPa. Para otras condiciones, los valores deben modificarse como sigue:
(a) Para concreto liviano estructural con densidad w_c dentro del rango de 1440 a 1840 kg/m^3, los valores de la tabla deben multiplicarse por $(1.65\text{-}0.0003\ w_c)$, pero no menos de 1.09.
(b) Para f_y distinto de 420 MPa, los valores de esta tabla deben multiplicarse por $(0.4 + f_y/700)$

Adicionalmente, en el Comentario, el Reglamento incluye el caso de los espesores para aquellos elementos que soportan muros divisorios o particiones frágiles que puedan sufrir daños con motivo de las deflexiones. Transcribimos la tabla CR.9.5.

Tabla CR.9.5 – Alturas o espesores mínimos recomendados para vigas no pre-esforzadas o losas reforzadas en una dirección que soporten muros divisorios y particiones frágiles susceptibles de dañarse debido a deflexiones grandes, a menos que se calculen las deflexiones

	Espesor mínimo, **h**			
	Simplemente apoyados	Con un Extremo continuo	Ambos Extremos continuos	En voladizos
Elementos	Elementos que soporten o estén ligados a divisiones u otro tipo de elementos susceptibles de dañarse debido a deflexiones grandes			
Losas macizas en una dirección	$\frac{\ell}{14}$	$\frac{\ell}{16}$	$\frac{\ell}{19}$	$\frac{\ell}{7}$
Vigas o losas nervadas en una dirección	$\frac{\ell}{11}$	$\frac{\ell}{12}$	$\frac{\ell}{14}$	$\frac{\ell}{5}$

Las Notas son las mismas de la Tabla C.9.5 (a) del Reglamento.

Continúa el Reglamento NSR-10 sobre el tema de las deflexiones en las secciones C.9.5.2.2 a C.9.5.2.6 que nos permitimos transcribir:

C.9.5.2.2 Cuando se calculen las deflexiones, aquéllas que ocurran inmediatamente con la aplicación de la carga deben calcularse mediante los métodos o formulas usuales para deflexiones elásticas, tomando en consideración los efectos de la fisuración y del refuerzo en la rigidez del elemento.

C.9.5.2.3 A menos que los valores de rigidez se obtengan mediante un análisis más completo, las deflexiones inmediatas deben calcularse usando el módulo de elasticidad del concreto, E_c, que se especifica en C.8.5.1 (para concreto de peso normal o liviano) y el momento de inercia efectivo, I_e, que se indica a continuación, pero sin tomarlo mayor que I_g.

$$I_e = \left\{\frac{M_{cr}}{M_a}\right\}^3 I_g + \left\{1-\left[\frac{M_{cr}}{M_a}\right]^3\right\} I_{cr} \qquad \text{(C.9-8)}$$

donde

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \qquad \text{(C.9-9)}$$

y para concreto de peso normal,

$$f_r = 0.62\lambda\sqrt{f'_c} \qquad \text{(C.9-10)}$$

C.9.5.2.4 Para elementos continuos se permite tomar I_e como el promedio de los valores obtenidos de la ecuación (C.9-8) para las secciones criticas de momento positivo y negativo. Para elementos prismáticos, se permite tomar I_e como el valor obtenido de la ecuación (C.9-8) en el centro de la luz para tramos simples y continuos, y en el punto de apoyo para voladizos.

C.9.5.2.5 A menos que los valores se obtengan mediante un análisis mas completo, la deflexión adicional a largo plazo, resultante del flujo plástico y retracción de elementos en flexión (concreto normal o liviano), debe

determinarse multiplicando la deflexión inmediata causada por la carga permanente por el factor λ_Δ

$$\lambda_\Delta = \frac{\xi}{1+50\rho'} \qquad \text{(C.9-11)}$$

Donde ρ' es el valor en la mitad de la luz para tramos simples y continuos y en el punto de apoyo para voladizos. Puede tomarse ξ, el factor dependiente del tiempo para cargas sostenidas, igual a:

5 años o más.....2.0
12 meses.....1.4
6 meses.....1.2
3 meses.....1.0

C.9.5.2.6 La deflexión calculada de acuerdo con C.9.5.2.2 a C.9.5.2.5 no debe exceder los límites establecidos en la tabla C.9.5 (b).

Transcribimos la tabla C.9.5 (b) del Reglamento.

Tabla C.9.5 (b)-Deflexión máxima admisible calculada

Tipo de elemento	Deflexión considerada	Limite de deflexión
Cubiertas planas que no soporten ni estén ligadas a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes.	Deflexión inmediata debida a la carga viva, L	$\ell/180^a$
Entrepisos que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes.	Deflexión inmediata debida a la carga viva, L	$\ell/360$
Sistema de entrepisos o cubierta que soporte o esté ligado a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes.	La parte de la deflexión total que ocurre después de la unión de los elementos no estructurales (la suma de la deflexión a largo plazo debida a todas las cargas permanentes, y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional)[b]	$\ell/480^b$
Sistema de entrepisos o cubierta que soporte o esté ligado a elementos no estructurales no susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes.		$\ell/240^b$

*Este límite no tiene como objeto constituirse en un resguardo contra el empozamiento de aguas. Este último se debe verificar mediante cálculos de deflexión adecuados, incluyendo las deflexiones debidas al agua estancada, y considerando los efectos a largo plazo de todas las cargas permanentes, la contraflecha, las tolerancias de construcción y la confiabilidad en las medidas tomadas para el drenaje.

†Las deflexiones a largo plazo deben determinarse de acuerdo con C.9.5.2.5 ó C.9.5.4.3, pero se pueden reducir en la cantidad de deflexión calculada que ocurra antes de unir los elementos no estructurales. Esta cantidad se determina basándose en datos de ingeniería aceptables correspondiente a las características tiempo -deflexión de elementos similares a los que se están considerando.

‡Este límite se puede exceder si se toman medidas adecuadas para prevenir daños en elementos apoyados o unidos.

§Pero no mayor que la tolerancia establecida para elementos no estructurales. Este límite se puede exceder si se proporciona una contraflecha de modo que la deflexión total menos la contraflecha no exceda dicho límite.

Elementos reforzados en dos direcciones (no pre-esforzados)

El Reglamento colombiano especifica los espesores mínimos que pueden aplicarse para los elementos reforzados en dos direcciones de acuerdo a la sección C.9.5.3 en sus apartes C.9.5.3.1 a C.9.5.3.4 que nos permitimos en transcribir:

C.9.5.3.1 Debe emplearse la sección C.9.5.3 para definir el espesor mínimo de losas u otros elementos reforzados en dos direcciones diseñados de acuerdo con las disposiciones del Capitulo C.13 y que se ajusten a los requisitos C.13.6.1.2. El espesor de las losas sin vigas interiores que se extiendan entre los apoyos en todos sentidos deben satisfacer los requisitos C.9.5.3.2 ó C.9.5.3.4. El espesor de las losas con vigas que se extiendan entre los apoyos en todos sentidos debe satisfacer los requisitos de una de C.9.5.3.3 o C.9.5.3.4.

C.9.5.3.2 El espesor mínimo de las losas sin vigas interiores que se extiendan entre los apoyos y que tienen una relación entre lados no mayor que 2, debe cumplir con lo requerido de la tabla C.9.5(c) y no debe ser inferior que los siguientes valores:

(a) Losas sin ábacos como se define en C.13.2.5. ..... 125 mm

(b) Losas con ábacos como se define en C.13.2.5. ..... 100 mm

C.9.5.3.3 El espesor mínimo h para losas con vigas que se extienden entre los apoyos en todos los lados debe ser:

(a) Para α_{fm} igual o menor a 0.2, se aplican las disposiciones de C.9.5.3.2.

(b) Para α_{fm} mayor que 0.2 pero no mayor que 2.0, h no debe ser menor que:

$$h = \frac{\ell_n\left(0.8 + \frac{f_y}{1400}\right)}{36 + 5\beta(\alpha_{fm} - 0.2)} \qquad (C.9\text{-}12)$$

pero no menor que 125 mm

(c) Para α_{fm} mayor que 0.2, h no debe ser menor que:

$$h = \frac{\ell_n\left(0.8 + \frac{f_y}{1400}\right)}{36 + 9\beta} \qquad (C.9\text{-}13)$$

pero no menor que 90 mm

(d) En bordes discontinuos debe disponerse de una viga de borde que tenga una relación de rigidez α_f no menor de 0.80, o bien aumentar el espesor mínimo requerido por las ecuaciones (C.9-12) ó (C.9-13), por lo menos un 10 por ciento en el panel que tenga un borde discontinuo.

Tabla C.9.5(c) Espesores mínimos de losas sin vigas interiores*

f_y MPa†	Sin ábacos‡			Con ábacos‡		
	Paneles exterior		Paneles interior	Paneles exteriores		Paneles interior
	Sin vigas de borde	Con vigas de borde§		Sin vigas de borde	Con vigas de borde§	
280	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{40}$	$\frac{\ell_n}{40}$
420	$\frac{\ell_n}{30}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$
520	$\frac{\ell_n}{28}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{34}$	$\frac{\ell_n}{34}$

*Para construcción de dos direcciones, ℓ_n, es la luz libre en la dirección larga, medida entre cara de los apoyos en losas sin vigas y entre caras de las vigas, para losas con vigas u otros apoyos en otros casos.

†Para f_y entre los valores dados en la tabla, el espesor mínimo debe obtenerse por interpolación lineal.

‡Abaco, como se define C.13.2.5.

§Losas con vigas entre las columnas a lo largo de los bordes exteriores. El valor de α_f para la viga de borde no debe ser menor que 0.8.

El termino ℓ_n, en (b) y (c) corresponde a la luz libre en la dirección larga medida cara a cara de las vigas. El termino β en (b) y (c) corresponde a la relación de la luz libre en la dirección larga a la luz libre en la dirección corta de la losa.

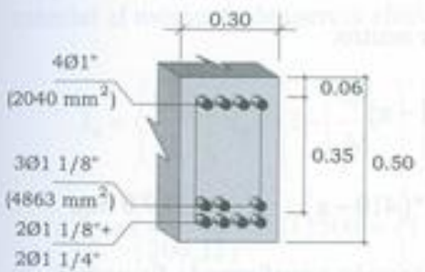
C.9.5.3.4 Puede utilizarse espesores de losas menores que los mínimos requeridos en C.9.5.3.1, C.9.5.3.2 y C.9.5.3.3 cuando las deflexiones calculadas no excedan los límites de la tabla C.9.5(b). Las deflexiones deben

calcularse tomando en cuenta el tamaño y la forma del panel, las condiciones de apoyo y la naturaleza de las restricciones en los bordes de la losa. El modulo de elasticidad del concreto, E_c, debe ser el especificado en C.8.5.1. El momento de inercia efectivo, I_e, debe ser el obtenido por medio de la ecuación (C.9-8); se permite emplear otros valores si los resultados del cálculo de la deflexión concuerdan razonablemente con los resultados de ensayos de alcance apropiado. La deflexión adicional a largo plazo debe calcularse de acuerdo con C.9.5.2.5.

A continuación algunos problemas de aplicación de las nociones anteriores.

Problema 2.23

En el problema 2.16 se diseñó una viga de 0.30 x 0.50 m, simplemente apoyada en una luz de 8 metros, armada en concreto de f'_c = 21.1 MPa, refuerzo para f_y = 240 MPa y una carga de 25.04 kN/m, obteniéndose los resultados de la figura adjunta. Ahora calcularemos para esta viga las deflexiones inmediatas causadas por la carga muerta, las deflexiones inmediatas causadas por la carga viva y las deflexiones adicionales a largo plazo causadas por la retracción de fraguado y el flujo plástico.



f'_c = 21.1 MPa

f_y = 240 MPa

$(\rho-\rho')$mín < $(\rho-\rho')$ < $(\rho-\rho')$máx (según problema 2.16)

Figura 2.47

Solución

Las deflexiones inmediatas se calcularán por las fórmulas de la teoría de la elasticidad, considerando los efectos que tienen la fisuración y el refuerzo sobre la rigidez de la viga; las deflexiones adicionales deben determinarse multiplicando las deflexiones inmediatas causadas por la carga muerta por el factor λ_Δ del Reglamento NSR-10.

Para el cálculo de las deflexiones inmediatas se debe determinar la profundidad del eje neutro bajo las cargas de servicio, utilizando el método de la sección transformada:

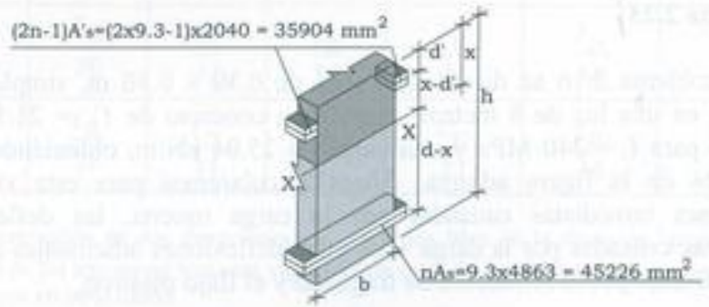


Figura 2.48

Determinación de la profundidad del eje neutro:

$$\frac{bx^2}{2}+(2n-1)A'_s(x-d')=nA_s(d-x)$$

$$150x^2+35904*(x-60)=45226*(410-x) \quad \therefore \ x=189.0 \text{ mm}$$

Por tanto, el momento de inercia de la sección transformada fisurada I_{cr} es, en cm^4:

$$I_{cr}=\frac{bx^3}{3}+(2n-1)A'_s(x-d')^2+nA_s(d-x)^2$$

$$I_{cr}=\frac{30*18.90^3}{3}+359.04*(18.90-6)^2+452.26*(41-18.90)^2$$

$$I_{cr}=348149 \text{ cm}^4$$

Por otra parte, I_g = momento de inercia de la sección total de concreto es:

$I_g =$ $30*50^3/12 = 312500 \text{ cm}^4$ y

$y_t =$ distancia medida desde el eje centroidal de la sección total, despreciando el refuerzo, hasta la fibra extrema en tracción:

$y_t =$ $50 - 18.90 = 31.10$ cm

A continuación, se calcula el M_{cr} = momento de fisuración = fI_g / y_t, en donde

$$f_r = 0.7\sqrt{f'_c} = 3.21 \text{MPa}$$

$$\therefore M_{cr}=\frac{3210*0.003125}{0.3110}=32.25 \text{ kN-m}$$

Con el momento máximo en el elemento M_a para el nivel de carga que se está evaluando, calculado en el problema 2.16 de 200.32 kN·m, se puede calcular el momento de inercia efectivo I_e :

$$I_e=\left\{\frac{M_{cr}}{M_a}\right\}^3 I_g+\left\{1-\left[\frac{M_{cr}}{M_a}\right]^3\right\}I_{cr}$$

$$I_e=\left\{\frac{32.25}{200.32}\right\}^3 *312500+\left\{1-\left[\frac{32.25}{200.32}\right]^3\right\}*348149=347999 \text{ cm}^4$$

$I_e > I_g \ \therefore \quad I_e = 312500 \text{ cm}^4$

También del Reglamento, $E_c = 4700\sqrt{f'_c} = 21573$ MPa

Por lo tanto, la deflexión elástica inmediata será:

$$\delta = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI_e} = \frac{5}{384} * \frac{25.04*8^4}{21573000*0.003125} = 0.0198 \text{ m}$$

para w en kN/m, L en m, E en kN/m^2 e I_e en m^4

Si del total de la carga (25.04 kN/m) se pudiera concluir que el 80% (peso propio de la viga y parte de la carga sobre la viga) es carga muerta, se establece:

La deflexión inmediata causada por la carga muerta es de:

0.80*0.0198 = 0.0158 m (15.8 mm)

La deflexión inmediata causada por la carga viva es de:

0.20*0.0198 = 0.0040 m (4.0 mm)

La deflexión adicional a largo plazo (5 años o más), causada por la retracción de fraguado y el flujo plástico, se determina multiplicando la deflexión causada por la carga muerta por el factor λ_Δ, donde:

$$\lambda_\Delta = \frac{\xi}{1+50\rho'}$$

$$\text{con } \xi = 2.0 \text{ y } \rho' = \frac{2040}{300*410} = 0.016585;$$

$$\lambda_\Delta = \frac{2.0}{1+50*0.016585} = 1.09$$

Luego la deflexión adicional a largo plazo será: 0.0158*1.09 = 0.0172 m (17.2 mm)

Si la viga del problema hace parte de una cubierta o losa que soporta o está unida a elementos no estructurales que no pueden ser dañados por deflexiones grandes, se debe cumplir:

Deflexión a largo plazo por carga muerta más deflexión por carga viva debe ser menor de $\frac{\ell}{240}$.

$$\therefore 0.0172 + 0.0040 = 0.0212 < \frac{8}{240} = 0.0333 \text{ m}$$

Por lo tanto, el diseño presentado en el problema 2.16 resulta correcto.

Problema 2.24

No obstante el resultado del problema anterior, en el problema 2.18 se diseñó la armadura para la misma viga con el criterio de reducir la deflexión por plastificación del concreto, adoptando una cuantía $(\rho - \rho') = 0.020$, con lo cual se obtuvieron los resultados de la figura. Ahora se calcularán para este diseño las deflexiones inmediatas causadas por la carga muerta, las deflexiones inmediatas causadas por la carga viva y las deflexiones adicionales a largo plazo causadas por la retracción de fraguado y el flujo plástico, evaluando si la disminución de flecha que se busca es o no justificable.

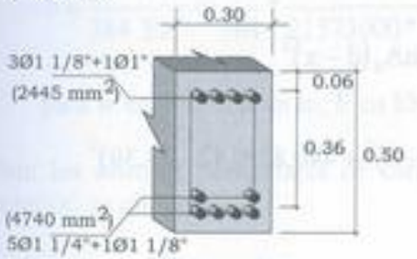


Figura 2.49

$f'_c = 21.1$ MPa

$f_y = 240$ MPa

$(\rho - \rho')\text{mín} < (\rho - \rho') < (\rho - \rho')\text{máx}$ (según problema 2.18)

Solución

Se utiliza el mismo procedimiento del problema anterior, así:

Determinación de la profundidad del eje neutro bajo las cargas de servicio:

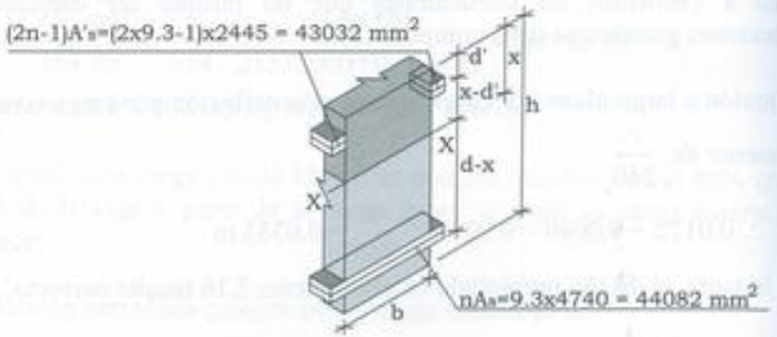


Figura 2.50

$$\frac{bx^2}{2} + (2n-1)A'_s(x-d') = nA_s(d-x)$$

$$150x^2 + 43032*(x-60) = 44082*(420-x)$$

$$\therefore \quad x = 183.9 \text{ mm}$$

El momento de inercia de la sección transformada fisurada es en cm^4:

$$I_{cr} = \frac{bx^3}{3} + (2n-1)A'_s(x-d')^2 + nA_s(d-x)^2$$

$$I_{cr} = \frac{30*18.39^3}{3} + 430.32*(18.39-6)^2 + 440.82*(42-18.39)^2$$

$$I_{cr} = 373980 \text{ cm}^4$$

El momento de inercia de la sección total de concreto, I_g en cm^4:

$I_g = 30*50^3/12 = 312500 \text{ cm}^4$ y

y_t = distancia desde el eje centroidal hasta la fibra extrema a tracción:

$y_t = 50 - 18.39 = 31.61$ cm

El momento de fisuración $M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} = \frac{3210*0.003125}{0.3161} = 31.73$ kN-m

Y el momento máximo $M_a = 197.12$ kN-m. Por lo tanto:

$$I_e = \left\{\frac{M_{cr}}{M_a}\right\}^3 I_g + \left\{1 - \left[\frac{M_{cr}}{M_a}\right]^3\right\} I_{cr}$$

$$I_e = \left\{\frac{31.73}{200.32}\right\}^3 *312500 + \left\{1 - \left[\frac{31.73}{200.32}\right]^3\right\} *373980 = 373736 \text{ cm}^4$$

$I_e > I_g \quad \therefore \quad I_e = 312500 \text{ cm}^4$

$E_c = 4700\sqrt{f'_c} = 21573$ MPa

Por consiguiente, la deflexión elástica inmediata será:

$$\delta = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI_e} = \frac{5}{384} * \frac{25.04*8^4}{21573000*0.003125} = 0.0198 \text{ m}$$

para w en kN/m, L en m, E en kN/m^2 e I_e en m^4

Para los mismos porcentajes de carga muerta y carga viva del problema anterior, se obtiene:

La deflexión inmediata por carga muerta: $0.80*0.0198 = 0.01584$m = (15.8mm)

La deflexión inmediata por la carga viva: $0.20*0.0198 = 0.0040$ m = (4.0 mm)

La deflexión adicional a largo plazo (5 años o más) será de: $0.01584\lambda_\Delta$, en donde:

$$\lambda_\Delta = \frac{\xi}{1+50\rho'} = \frac{2.0}{1+50*\frac{2445}{300*420}} = 1.02$$

Luego la deflexión adicional será: 0.01584*1.02 = 0.016 m (16 mm)

Con la misma consideración del problema anterior:

Deflexión a largo plazo por carga muerta más deflexión por carga viva debe ser menor de $\frac{\ell}{240}$.

$$\therefore\ 0.016 + 0.0040 = 0.020 < \frac{8}{240} = 0.0333 \text{ m } (33.3 \text{ mm})$$

La solución de este problema nos muestra una disminución en la deflexión total de 0.0012 m (1.2 mm) por efecto del aumento en la armadura de compresión de 2040 mm^2 a 2445 mm^2, lo cual nos parece poco justificable, no solamente porque no es estrictamente necesario desde el punto de vista de deflexión admisible, sino porque implica un sobre costo para una solución de un orden de magnitud muy pequeño y que igualmente podría lograrse si, por ejemplo, se suministra a la viga una contraflecha apropiada en el momento de construirla.

Capítulo 3

CORTANTE Y TORSION

CORTANTE Y TORSIÓN

CORTANTE

Resistencia al cortante

Según el Reglamento NSR-10, el diseño de las secciones transversales sometidas a cortante debe basarse en:

$$\phi V_n \geq V_u$$

donde V_u es la fuerza cortante mayorada en la sección bajo consideración y V_n es la resistencia nominal al cortante que se calcula como:

$$V_n = V_c + V_s$$

en la cual V_c es la resistencia nominal al cortante proporcionada por el concreto y V_s es la resistencia nominal al cortante proporcionada por el refuerzo de cortante.

Para efectos del diseño, se toma:

$V_u = \phi V_n = \phi V_c + \phi V_s$ de donde,

$\phi V_s = V_u - \phi V_c$, lo cual quiere decir que se proporcionará refuerzo a cortante cuando V_u exceda la resistencia a cortante de diseño del concreto. El coeficiente de reducción ϕ se tomará igual a 0.75.

El cálculo de V_u debe efectuarse, para elementos no preesforzados, en una sección localizada a una distancia d (altura efectiva) medida desde la cara del apoyo y todas las secciones situadas a menos de la distancia d se podrán diseñar para el mismo cortante V_u.

A continuación anexamos los casos típicos para la aplicación del requisito anterior.

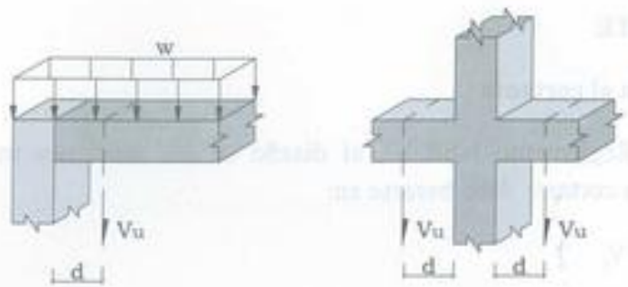


Figura 3.1a

Excepciones del requisito del cálculo a la distancia d corresponden a los miembros enmarcados por un apoyo en tracción, los miembros en los cuales las cargas no están aplicadas en la cara superior, los miembros en los cuales el cortante difiere radicalmente entre el calculado en el apoyo y el obtenido a una distancia d, tal como el caso en que se sitúa una carga concentrada cerca del apoyo, y en el caso de los voladizos cortos y en las ménsulas.

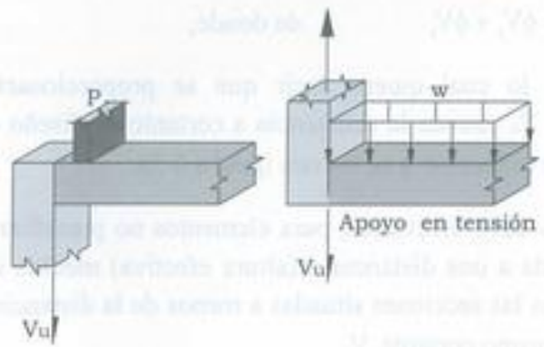


Figura 3.1b

Para elementos de gran altura sometidos a flexión, ménsulas, muros, losas y zapatas, se aplican disposiciones especiales que se estudiarán en los capítulos correspondientes que estén dentro del alcance del presente texto; de todas maneras, se remite al lector al Reglamento NSR-10, capítulos C.11 y C.21, este último con los requisitos para estructuras con capacidad de disipación de energía mínima (DMI), moderada (DMO) y especial (DES).

Resistencia a la fuerza cortante proporcionada por el concreto

Para elementos sometidos a cortante y flexión únicamente, la resistencia proporcionada por el concreto para diseño será igual a:

$\phi V_c = \phi 0.17\sqrt{f'_c}\, b_w d$, a menos que se haga un cálculo más detallado por la ecuación:

$$\phi V_c = \phi\left\{0.16\sqrt{f'_c} + 17\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right\} b_w d \le \phi 0.29\sqrt{f'_c}\, b_w d$$

donde M_u es el momento flector factorizado que se presenta simultáneamente con V_u en la sección de diseño, $(V_u d)/M_u$ no debe tomarse mayor que 1.0 al calcular ϕV_c y ρ_w es la cuantía del refuerzo longitudinal e igual a $A_s/(b_w d)$ y b_w es el ancho del nervio.

Resistencia a la fuerza cortante proporcionada por el refuerzo

El refuerzo de cortante puede consistir en:

a) Estribos perpendiculares al eje del elemento;

b) Malla electrosoldada de alambre, con alambres localizados perpendicularmente al eje del elemento;

c) Estribos que formen un ángulo de 45° o más con el refuerzo longitudinal a tracción;

d) Refuerzo longitudinal cuya parte doblada forme un ángulo de 30° o más con el refuerzo longitudinal a tracción;

e) Combinaciones de estribos y refuerzo longitudinal doblado;

f) Espirales, estribos circulares y estribos cerrados de confinamiento.

Como se dijo antes, cuando la fuerza cortante factorizada V_u exceda la resistencia a cortante de diseño ϕV_c, se proporcionará refuerzo a cortante de manera que:

$\phi V_s = V_u - \phi V_c$, en donde ϕV_s se calculará de acuerdo al tipo de refuerzo a utilizar, así:

a) Estribos perpendiculares al eje del elemento o malla soldada de alambre, con alambres también perpendiculares al mismo eje:

$$\phi V_s = \frac{\phi A_v f_y d}{s}, \quad \text{en donde}$$

A_v = Area del refuerzo de cortante dentro de una distancia s

b) Estribos que forman un ángulo de 45° o más con el refuerzo longitudinal a tracción o refuerzo longitudinal cuya parte doblada forme un ángulo de 30° o más con el refuerzo longitudinal a tracción.

$$\phi V_s = \phi \frac{A_v f_{yt} (\text{sen}\alpha + \cos\alpha) d}{s}, \quad \text{en donde}$$

α = Angulo entre los estribos inclinados o las barras longitudinales dobladas y el eje longitudinal del elemento.

c) Combinaciones de estribos y refuerzo longitudinal doblado: en este caso, como en todos en los que se utilice más de un tipo de refuerzo a cortante, la resistencia de diseño ϕV_s se calculará como la suma de los valores de ϕV_s calculados para los diferentes tipos de refuerzo.

En todos los casos, la fuerza de fluencia de diseño del refuerzo a cortante no debe ser mayor de 420 MPa, excepto malla electrosoldada cuyo f_y no debe ser mayor de 550 MPa y la resistencia a cortante para diseño, proporcionada por el refuerzo, deberá cumplir la condición:

$$\phi V_s \le \phi 0.66 \sqrt{f'_c} b_w d$$

Límites de espaciamiento para el refuerzo a cortante

Los estribos o la malla electrosoldada, ambos perpendiculares al eje del elemento, no se espaciarán a más de d/2, ni a más de 600 mm. Los estribos inclinados y el refuerzo longitudinal doblado se espaciarán de modo que cualquier línea a 45° trazada desde la mitad de la altura del elemento d/2, hacia el refuerzo longitudinal en tracción se cruce con al menos una línea de refuerzo a cortante.

Cuando $\phi V_s > \phi 0.33 \sqrt{f'_c} b_w d$, los anteriores espaciamientos se reducen a la mitad.

Además, deben tenerse en cuenta los requisitos contenidos en el Capítulo C.21 del Reglamento NSR-10.

Refuerzo mínimo a cortante

En todo elemento de concreto reforzado, en donde la fuerza de corte factorizada V_u sea mayor que la mitad de la resistencia de diseño al cortante proporcionada por el concreto ϕV_c, se colocará refuerzo a la fuerza cortante al menos siguiendo la especificación de área mínima transversal dada por la expresión:

$$A_{v\,min} = 0.062\sqrt{f'_c}\,\frac{b_w s}{f_{yt}} \geq 0.35 b_w s/f_{yt},$$

donde b_w y s se expresan en milímetros y f_y en MPa.

Esta expresión puesta en forma de separación de estribos:

$$s = \frac{A_v f_{yt}}{0.062\sqrt{f'_c} b_w} \leq \frac{A_v f_{yt}}{0.35 b_w}$$

Se exceptúan del requisito anterior las zapatas y losas solidas, los elementos alveolares con una altura total inferior a 315 mm, las losas nervadas, las vigas con h no mayor que 250mm, las vigas integrales con losas con h inferior a 600 mm y no mayor de 2.5 veces el espesor del ala ó 0.5 veces el ancho del alma y las vigas construidas con concreto de peso normal reforzado con fibra de acero, con f'_c igual o menor a 40 MPa, h inferior a 600 mm y V_u no mayor de $\phi 0.17\sqrt{f'_c} b_w d$.

En estructuras de capacidad de disipación de energía moderada (DMO) y especial (DES) se debe cumplir los requisitos adicionales del Capítulo C.21 del Reglamento.

La resistencia a cortante suministrada por el refuerzo debe cumplir la condición: $\phi V_s \leq \phi 0.66\sqrt{f'_c} b_w d$

Algunos de estos valores límites para concretos de varias calidades:

f'_c	f'_c	$\frac{\phi V_c}{b_w d} = \phi 0.17\sqrt{f'_c}$	$\frac{\phi V_c}{b_w d} = \phi \frac{0.17\sqrt{f'_c}}{2}$	$\frac{\phi V_s}{b_w d} = \phi 0.33\sqrt{f'_c}$	$\frac{\phi V_s}{b_w d} = \phi 0.66\sqrt{f'_c}$
p.s.i.	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
2000	14.1	0.478	0.239	0.928	1.856
2500	17.6	0.536	0.268	1.040	2.080
3000	21.1	0.585	0.293	1.136	2.272
3500	24.6	0.632	0.316	1.228	2.456
4000	28.1	0.676	0.338	1.312	2.624
4500	31.6	0.717	0.359	1.391	2.782
5000	35.2	0.756	0.378	1.468	2.936

Estribos perpendiculares

A partir de la expresión del cortante nominal total para el diseño V_u, en una viga rectangular de dimensiones b_w y d que ha sido diseñada a flexión con una armadura a tracción A_s y que soporta un corte a la falla V_n se determinará una expresión para la separación de estribos y su valor máximo en función de d = altura efectiva.

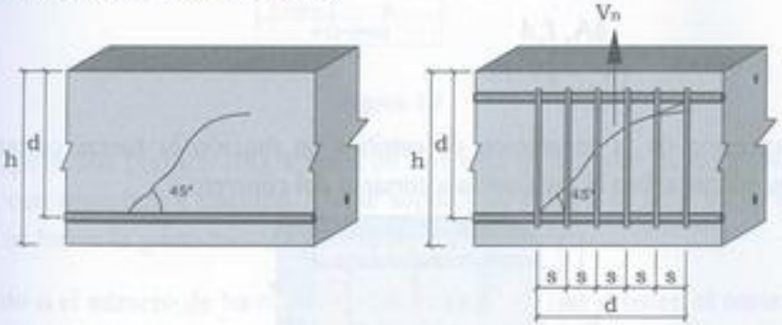


Figura 3.2

Se supone una porción longitudinal de una viga rectangular de dimensiones $b_w d$, con armadura a tracción A_s y que soporta un corte de falla V_n, formándose la grieta mostrada en la figura 3.2.

Siendo n el número de estribos de área A_v que atraviesan la grieta, contribuyendo a resistir el corte, se plantea:

$V_n = V_c + n A_v f_y$, en donde:

V_n = corte de falla

V_c = resistencia al corte suministrada por el concreto

n = número de estribos = d/s que atraviesan la grieta, donde s es la separación de los estribos

Para ϕV_n:

$$\phi V_n = \phi V_c + \phi \frac{dA_v f_y}{s}$$

$$\therefore V_u = \phi V_c + \phi \frac{A_v f_y d}{s}$$

$$\therefore s = \frac{\phi A_v f_y d}{(V_u - \phi V_c)}$$

expresión de la separación de estribos en función la fuerza cortante excedente sobre la resistencia a cortante del concreto.

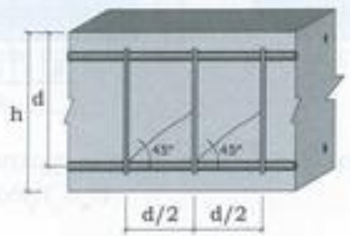


Figura 3.3

La separación de estribos debe garantizar que las posibles grietas formadas según el esquema de la figura, con un ángulo aproximado con la horizontal de 45°, nunca pasen de la mitad de la altura efectiva de la viga y puedan interesar la zona de compresiones, es decir:

s máxima = d/2

Refuerzo Longitudinal Doblado

A partir de la expresión de la fuerza nominal total de corte para el diseño V_u en una viga rectangular de dimensiones b_w y d, que ha sido diseñada a la flexión con una armadura a la tracción A_s y soporta un corte a la falla V_n, se determinará una expresión para el área de hierros a doblar y el máximo de la separación de las barras dobladas a 45°.

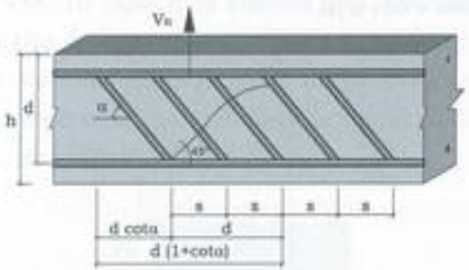


Figura 3.4

Se supone una porción longitudinal de una viga rectangular de dimensiones $b_w d$, con armadura a tracción A_s que soporta un corte a la falla V_n, y en la cual se forma la grieta mostrada en la figura 3.4.

Siendo n el número de barras dobladas de área A_v que resisten el corte V_n, se puede plantear:

$$V_n = V_c + nA_v f_y \operatorname{sen}\alpha$$

en donde:

V_u = corte de falla

V_c = resistencia nominal al corte suministrada por el concreto

n = número de barras dobladas $= \dfrac{d(1+\cot\alpha)}{s}$

multiplicando por ϕ:

$$\phi V_n = \phi V_c + \phi \frac{d(1+\cot\alpha) A_v f_y \operatorname{sen}\alpha}{s}$$

$$\therefore V_u = \phi V_c + \phi \frac{A_v f_y (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) d}{s}$$

$$\therefore A_v = \frac{(V_u - \phi V_c)s}{\phi f_y (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) d}$$

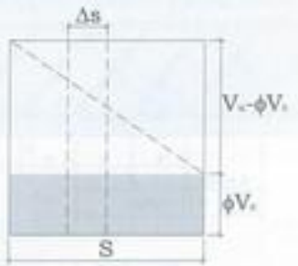


Figura 3.5

Si en el diagrama de fuerza cortante adjunto, de longitud S, se designa por A_{v_t} el área total de las barras necesarias a doblar:

$$A_{v_t} = \frac{\sum_0^S (V_u - \phi V_c)\Delta s}{\phi f_y (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) d}$$

que para el caso de carga uniforme y diagrama de fuerza triangular, resulta:

$A_{v_t} = \dfrac{\frac{1}{2}(V_u - \phi V_c)S}{\phi f_y (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) d}$, y con el ángulo más usual $\alpha = 45°$ se tiene:

$$A_{v_t} = \frac{\frac{1}{2}(V_u - \phi V_c)S}{\phi \sqrt{2} f_y d}$$

La separación de barras dobladas debe garantizar que cada línea a 45° que se extienda hacia la reacción desde la mitad de la altura del elemento hacia el refuerzo longitudinal en tracción, sea cruzada por lo menos por una línea de refuerzo a cortante; por tanto, en el caso de barras dobladas a 45° su separación máxima, según la Figura 3.6, debe ser la altura efectiva d.

El Reglamento NSR-10 especifica además que "únicamente las tres cuartas (3/4) partes centrales de la porción inclinada de cualquier barra longitudinal doblada pueden considerarse efectivas como esfuerzo a cortante". Lo anterior puede interpretarse, para el caso de barras dobladas a 45°, que su separación máxima debe ser de 3/4 d.

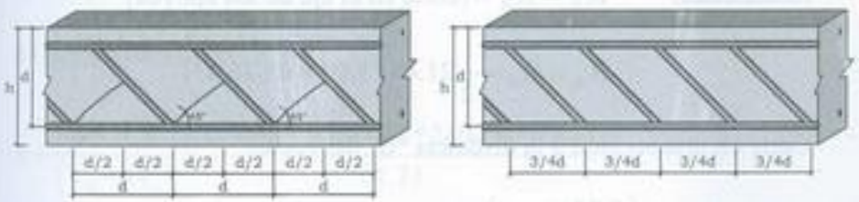


Figura 3.6

A continuación algunas aplicaciones de los conceptos anteriores.

Problema 3.1

La viga del problema 2.16, de sección 0.30 x 0.50 m, simplemente apoyada en una luz de 8 metros, por construirse en concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero para f_y = 240 MPa, resultó doblemente armada con un refuerzo a tracción de 2ϕ1 ¼"+ 5ϕ1 ⅛" y un refuerzo a compresión de 4ϕ1", constituyéndose así en una viga esforzada por encima de lo normal. Con esta premisa, se utiliza como modelo de diseño a la fuerza cortante para los diferentes tipos de refuerzo así:

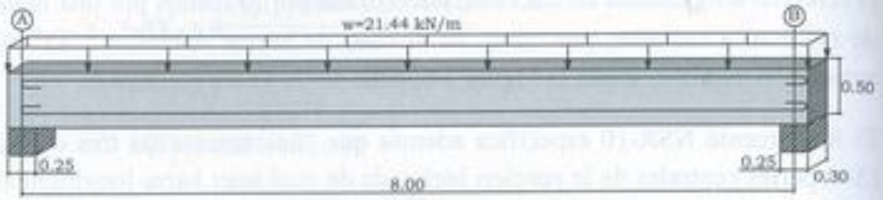


Figura 3.7

a) Diseño para estribos perpendiculares al eje del elemento:

Reacciones: $R_A = R_B =$ (corte en el eje de los apoyos)

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} 21.44 * 8.00 = 85.76 \text{ kN}$$

Corte en una sección a la distancia "d" del borde:

$$V = 85.76 - \left(\frac{0.25}{2} + 0.41 \right) * 21.44 = 74.29 \text{ kN}$$

Utilizando el mismo coeficiente de carga (U = 1.8) del problema 2.16, que para el diseño a cortante representa un factor de seguridad F. de S. = 1.8/ 0.75 = 2.40 resulta:

$V_u = 1.8 * 74.29 = 133.72$ kN

La resistencia proporcionada por el concreto para diseño será:

$$\phi V_c = \phi 0.17 \sqrt{f'_c} b_w d = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 0.30 * 0.41 * 1000 = 71.98 \text{kN}$$

Con estos valores hacemos el diagrama de fuerzas cortantes:

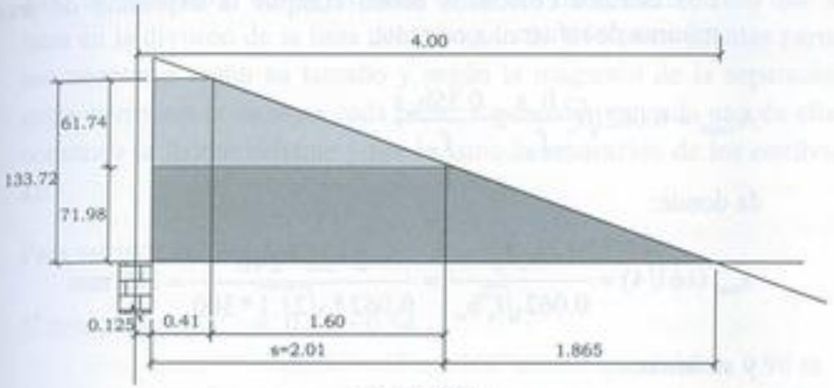


Figura 3.8

Para las secciones localizadas a menos de la distancia "d" de la cara del apoyo el valor es $V_u - \phi V_c = 61.74 \text{kN}$. La separación de estribos de ϕ 1/4", 3/8" y 1/2" será:

s (estribo de 1/4"):

$$s = \frac{\phi A_v f_y d}{(V_u - \phi V_c)} = \frac{0.75 * 2 * 0.000032 * 240000 * 0.41}{61.74} = 0.0765 \sim 0.07 \text{ m}$$

s (estribos de 3/8"): $= \frac{0.0765 * 71}{32} = 0.169 \sim 0.17$ m

s (estribos de 1/2"): $= \frac{0.0765 * 129}{32} = 0.308$ m ~ 0.30 m

Revisión de la separación máxima:

Si $V_u - \phi V_c > \phi 0.33\sqrt{f'_c} b_w d = 0.140$ MPa $- 140$ kN los espaciamientos anteriores se reducen a la mitad.

- Separación máxima de estribos = 0.5d = 0.5*0.41 = 0.205 ~ 0.20 m
- Los estribos colocados deben cumplir la expresión de área mínima de refuerzo a cortante:

$$A_{v\min} = 0.062\sqrt{f'_c}\frac{b_w s}{f_{yt}} \geq \frac{0.35 b_w s}{f_{yt}}$$

de donde:

$$s_{max}(\varepsilon\phi 1/4) = \frac{A_v f_{yt}}{0.062\sqrt{f'_c} b_w} = \frac{2*32*240}{0.062*\sqrt{21.1}*300} = 180 \text{ mm}$$

y su limite

$$s_{max}(\varepsilon\phi 1/4) = \frac{A_v f_{yt}}{0.35 b_w} = \frac{2*32*240}{0.35*300} = 146 \text{ mm}$$

adoptandose 140 mm o 0.14 m

Por lo tanto, para $\varepsilon\phi 3/8"$

$$s_{max}(\varepsilon\phi 3/8) = \frac{146*71}{32} = 324 \text{ mm} - 0.32\text{m}$$

$$s_{max}(\varepsilon\phi 1/2) = \frac{146*129}{32} = 588 \text{ mm} - 0.58\text{m}$$

Distancia S en la cual se necesita refuerzo al cortante:

$$S = 0.41 + \frac{61.74}{133.72}(4.00 - 0.125 - 0.41) = 0.41 + 1.60 = 2.01 \text{ m}$$

Si además debe colocarse refuerzo a cortante en donde la fuerza cortante mayorada V_u sea mayor que la mitad de la resistencia suministrada por el concreto ϕV_c, la distancia total para la colocación del refuerzo será:

Distancia total desde el borde del apoyo: 2.01 + 1.865/2 = 2.94 m

Para la colocación de los estribos se utiliza un procedimiento que se basa en la división de la base del triángulo de 1.60 m en cuantas partes sea necesario según su tamaño y según la magnitud de la separación entre estribos a colocar en cada parte, suponiendo en cada una de ellas constante la fuerza cortante y por lo tanto la separación de los estribos, así:

Para estribos de ϕ = 1/4":

1ª zona: distancia	= 0.41 + 0.54			
	= 0.95	- 15 ε ϕ 1/4" c/0.07	que cubren	0.98 m
2ª zona: distancia	= 0.53	- 6 ε ϕ 1/4" c/0.10	que cubren	0.60 m
3ª zona: distancia	= 0.53	- 4 ε ϕ 1/4" c/0.14	que cubren	0.56 m
Adicional: distancia	= 0.93	- 6 ε ϕ 1/4" c/0.14	que cubren	0.84 m
Total:	2.94 m			2.98 m

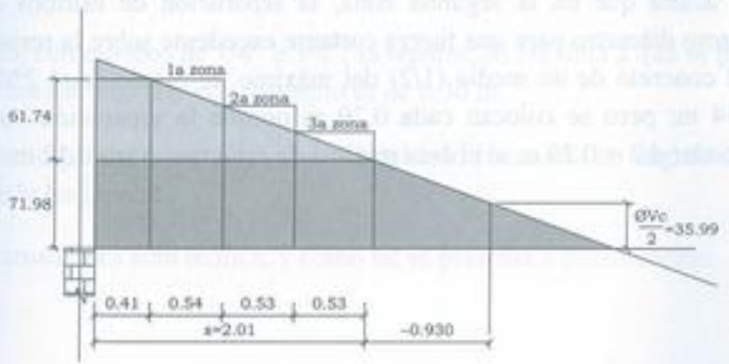


Figura 3.9

La separación de los estribos en la segunda zona corresponden a 3/2*0.07 = 0.105 m ~ 0.10 m.

En la tercera zona, la separación de estribos de un mismo diámetro para una fuerza cortante excedente sobre la resistencia del concreto de un tercio (1/3) del máximo de diseño, será 3*0.07 = 0.21 m; pero se colocan cada 0.14 m porque la separación no debe exceder d/2 = 0.20 m ni superior a la que corresponde al área mínima de refuerzo, o sea 0.14 m.

En la zona adicional se colocan solo 6 estribos ya que en las zonas anteriores se ha excedido la distancia requerida.

Para estribos de ϕ 3/8":

1ª zona: distancia	= 0.41 + 0.80			
	= 1.21	-	9 ε ϕ 3/8" c/0.17	que cubren 1.36 m
2ª zona: distancia	= 0.80	-	4 ε ϕ 3/8" c/0.20	que cubren 0.80 m
Adicional: distancia	= 0.93	-	4 ε ϕ 3/8" c/0.20	que cubren 0.80 m
Total:	2.94 m			2.96 m

Se aclara que en la segunda zona, la separación de estribos de un mismo diámetro para una fuerza cortante excedente sobre la resistencia del concreto de un medio (1/2) del máximo de diseño, será 2*0.17 = 0.34 m; pero se colocan cada 0.20 m porque la separación no debe exceder d/2 = 0.20 m ni el área mínima de refuerzo, o sea 0.32 m.

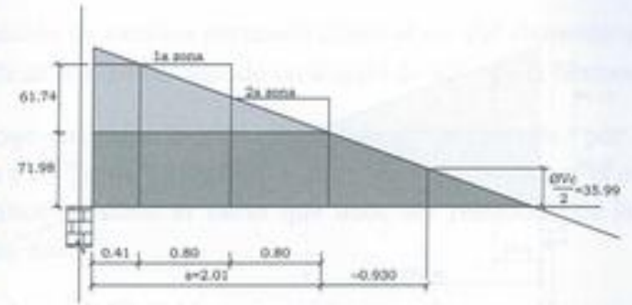


Figura 3.10

No se coloca estribos ϕ 1/2" puesto que s excede a d/2.

En esta viga reforzada a compresión por flexión, se debe asegurar este refuerzo con estribos que cumplan lo especificado en el Reglamento colombiano, Capítulo C.7, siendo su separación máxima la menor de:

- 16 diámetros de la barra longitudinal: 16*25.4 = 406.4 mm ~ 0.40 m

- 48 diámetros de la barra del estribo:

48*6.4 = 307.2 mm ~ 0.30 m (para εϕ 1/4")

48*9.5 = 456.0 mm ~ 0.45 m (para εϕ 3/8")

- menor dimensión de la viga: 0.30 m

Por tanto, con estribos de 1/4" o 3/8", la separación máxima a que se pueden colocar los estribos por este concepto es de 0.30 m.

b) Diseño para refuerzo longitudinal doblado formando un ángulo de 45° con la horizontal.

Esta alternativa es sólo teórica, y como tal se presenta a continuación:

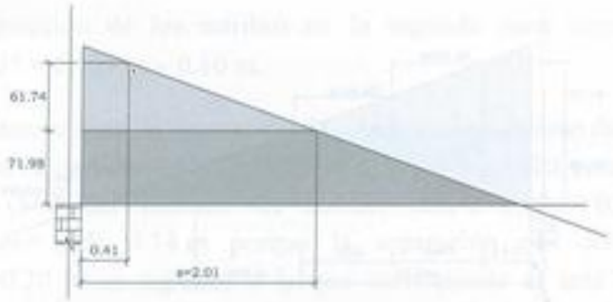


Figura 3.11

Area de hierros a doblar A_{v_1} para $\alpha = 45°$:

$$A_{v_1} = \frac{\frac{1}{2}(V_u - \phi V_c)S}{\phi\sqrt{2}\, f_y d} = \frac{\frac{1}{2}(133.72 - 71.98)*2.01}{0.75*\sqrt{2}*240000*0.41} = 0.000596\,m^2$$

Se puede colocar una sola barra $\phi 1\,\frac{1}{8}$"de las que vienen de la luz y que ya no se necesitan, a una distancia del borde del apoyo correspondiente al centroide del triángulo de base 2.01 m. Sin embargo, esta primera barra debe doblarse a 0.41*0.75 = 0.30 m del borde del apoyo, y por lo tanto pasará a 0.30 – 0.20 = 0.10 m del borde del apoyo medidos en el eje de la viga (véase Figura 3.12).

De todas maneras, esta colocación no impide el agrietamiento a partir del doblaje a 0.30 m del borde, por lo que teóricamente debemos colocar el refuerzo longitudinal doblado hasta 2.94 m, así:

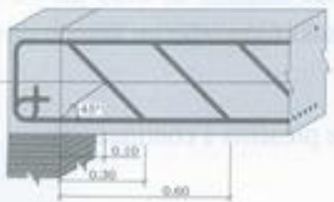


Figura 3.12

2ª barra doblada a 0.60 m del borde
3ª barra doblada a 0.90 m del borde
4ª barra doblada a 1.20 m del borde
5ª barra doblada a 1.50 m del borde
6ª barra doblada a 1.80 m del borde
7ª barra doblada a 2.10 m del borde
8ª barra doblada a 2.40 m del borde
9ª barra doblada a 2.70 m del borde
10ª barra doblada a 3.00 m del borde

c) Combinación de estribos perpendiculares al eje del elemento y refuerzo longitudinal doblado formando un ángulo de 45° con la horizontal.

Se escoge una distribución de estribos conveniente, por ejemplo, estribos ϕ 1/4" cada 0.14 m y a la fuerza suministrada por el concreto y los estribos se suma el saldo que debe ser resistido por los hierros doblados, así:

Los estribos ϕ 1/4"c/0.14 m suministran una fuerza = $V_{u\,estribos} = V_{ue}$

$$V_{ue} = \phi\frac{A_v f_y d}{s} = \frac{0.75*2*0.000032*240000*0.41}{0.14} = 33.73\ kN/m^2$$

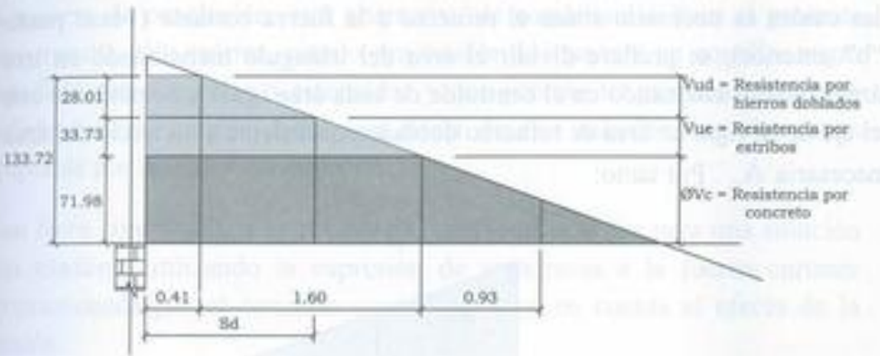


Figura 3.13

Los estribos de ϕ1/4" son necesarios en una distancia de S_e = 2.01 m adicionada de 0.93 m para cumplir el Reglamento de colocar refuerzo transversal donde $V_u > 0.5\phi V_c$; por consiguiente, se requieren 22 estribos ϕ 1/4" que cubren una longitud de 2.94 m. El diseño de los hierros doblados complementarios se hará a partir del cálculo de la distancia S_d (Figura 3.13) en la cual es necesario colocarlos, así:

$$S_d = 0.41 + \frac{28.01}{133.72}(4.00 - 0.125 - 0.41) = 1.14 \text{ m}$$

El área de hierros a doblar A_{v_i} para $\alpha = 45°$:

$$A_{v_i} = \frac{\frac{1}{2}(V_u - V_{ue} - \phi V_c)S}{\phi\sqrt{2}\, f_y d} = \frac{\frac{1}{2} * 28.01 * 1.14}{0.75 * \sqrt{2} * 240000 * 0.41} = 0.000153 \text{ m}^2$$

Se puede colocar una sola barra de $\phi 1/2"$ de las que vienen de la luz y que ya no se necesita, a una distancia del borde del apoyo igual al centroide del triángulo de base 1.14 m; sin embargo, para disminuir el número de barras por colocar para cumplir las especificaciones de separación y distancia en las cuales es necesario situar el refuerzo a la fuerza cortante (véase punto "b" anterior), se prefiere dividir el área del triángulo mencionado en tres áreas iguales colocando en el centroide de cada área igual y coincidente con el eje de la viga, un área de refuerzo doblado equivalente a un tercio del área necesaria A_{v_i}. Por tanto:

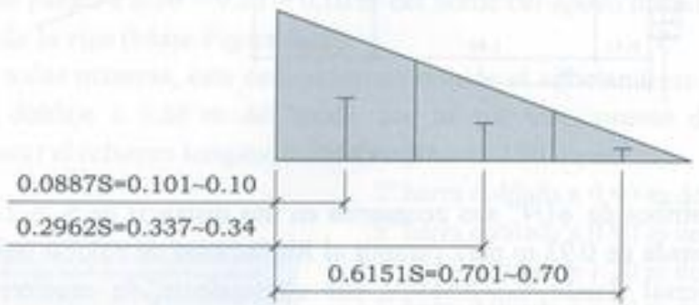


Figura 3.14

La primera barra debe pasar a 0.10 m del borde del apoyo medidos en el eje de la viga y doblarse a 0.30 m del mismo borde.

La segunda barra debe pasar a 0.34 m del borde del apoyo medidos en el eje de la viga y doblarse a 0.54 m del mismo borde.

La tercera barra doblada debe pasar a 0.70 m del borde del apoyo medidos en el eje de la viga, pero su separación con la anterior no debe exceder 0.30m; luego debe pasar a 0.64m del borde del apoyo medidos en el eje y doblarse a 0.84m del mismo borde.

No obstante haberse completado la necesidad teórica de refuerzo en forma de hierros doblados, se debe colocar uno adicional, así:

4ª barra: se debe doblar a 1.14 m del borde

A manera de conclusión, esta alternativa de combinación para el presente caso resulta sólo teórica, siendo practicable únicamente en aquellas vigas especialmente cargadas o esforzadas y que además tengan una sección lo suficientemente amplia como para hacer de esta solución una alternativa aceptable por diseño y construcción.

Con fines comparativos se resuelve el problema anterior para una solución con estribos, utilizando la expresión de resistencia a la fuerza cortante proporcionada por el concreto cuando se tiene en cuenta el efecto de la flexión.

Problema 3.2

Resolver el problema 3.1 para una solución con estribos, utilizando la expresión de resistencia de la fuerza cortante proporcionada por el concreto $\phi V_c = \phi\left\{0.16\sqrt{f'_c} + 17\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right\} b_w d \le \phi 0.29\sqrt{f'_c} b_w d$, suponiendo que la armadura a la tracción por flexión, $2\phi 1/2" + 5\phi 1/2"$ pasa sin interrupción hasta el apoyo.

Solución

Para la utilización de esta expresión de resistencia se debe calcular ρ_w, V_u y M_u en varios puntos de la viga, obteniendo la curva de ϕV_c que se compara con V_u para determinar el refuerzo necesario y su localización.

Cálculo de ρ_w: $\rho_w = \dfrac{4863}{300*410} = 0.039537$

Cálculo de V_u: a partir de las reacciones $R_A = R_B = 85.76$ kN, la carga uniforme w = 21.44 kN/m y el mismo coeficiente de carga U = 1.8 del problema anterior; con fines comparativos, se calcula V_u al borde del apoyo y a la distancia "d" del mismo borde:

$w_u = 1.8*21.44 = 38.59$ kN/m y V_u ($R_A = R_B$ últimas) = 154.36 kN

En el borde: V_u (borde) = 154.36 – 0.125*38.59 = 149.54 kN.

A la distancia "d": $V_u(d) = 154.36 - (0.125 + 0.41)*38.59 = 133.71$ kN

Cálculo de ϕV_c: se calcularán para M_u y V_u al borde del apoyo, a la distancia "d" y cada 0.50 m, hasta la mitad de la luz, de acuerdo a la siguiente tabla:

$$\phi V_c = \phi\left\{0.16\sqrt{f'_c} + 17\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right\} b_w d \le \phi 0.29\sqrt{f'_c} b_w d \le 0.123$$

y $\dfrac{V_u d}{M_u} \le 1.0$

Distancia al eje del m	M_u kN-m	V_u kN	$\frac{V_u d}{M_u}$	$\phi 17\rho_w \frac{V_u d}{M_u}$	ϕV_c MPa	ϕV_s kN
0.125	19.03	149.54	1.00	0.504	0.123	26.54
0.535	77.06	133.71	0.71	0.358	0.112	21.71
1.000	135.06	115.77	0.35	0.176	0.089	26.77
1.500	188.13	96.47	0.21	0.106	0.081	15.47
2.000	231.54	77.18	0.14	0.071	0.077	0.18
2.135	241.61	71.97	0.12	0.060	0.075	0.00
2.500	265.31	57.88	0.09	0.045	0.073	0.00
3.000	289.42	38.59	0.05	0.025	0.071	0.00
3.067	291.92	35.99	0.05	0.025	0.071	0.00
3.500	303.90	19.29	0.03	0.015	0.070	0.00
4.000	308.72	0.00	0.00	0.000	0.068	0.00

En la figura se observa el diagrama de fuerzas cortantes V_u y el de ϕV_c marcando el excedente y la zona para la cual necesitamos diseñar estribos:

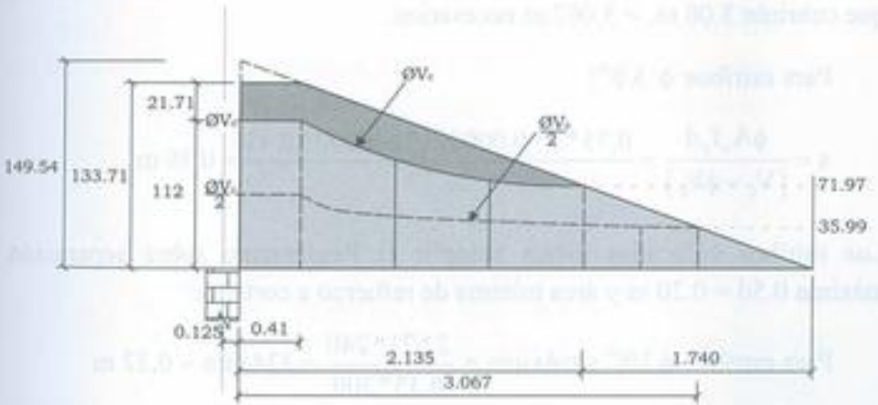


Figura 3.15

De la figura se obtiene que para las secciones localizadas a menos de la distancia "d" de la cara del apoyo, el valor de $(V_u - \phi V_c)$ es 21.71 kN y para la sección localizada a 1.00 m de la cara del apoyo, el valor $(V_u - \phi V_c)$ es 26.77 kN; por consiguiente las separaciones de estribos ϕ1/4" y 3/8" serán:

Para estribos ϕ 1/4":

$$s = \frac{\phi A_v f_y d}{(V_u - \phi V_c)} = \frac{0.75*2*0.000032*240000*0.41}{26.77} = 0.17 \text{ m}$$

Los estribos colocados deben cumplir el Reglamento sobre separación máxima 0.5d = 0.20 m y área mínima de refuerzo a cortante:

Para estribos ϕ 1/4":

$$\text{s máxima} = \frac{2*32*240}{0.35*300} = 146 \text{ mm} \sim 0.14 \text{ m}$$

Por esta razón se colocarán 23 $\varepsilon\phi$ 1/4" c/0.14 a partir del borde del apoyo que cubrirán 3.08 m. > 3.067 m necesarios.

Para estribos ϕ 3/8":

$$s = \frac{\phi A_v f_y d}{(V_u - \phi V_c)} = \frac{0.75*2*0.000071*240000*0.41}{26.77} = 0.39 \text{ m}$$

Los estribos colocados deben cumplir el Reglamento sobre separación máxima 0.5d = 0.20 m y área mínima de refuerzo a cortante:

Para estribos ϕ 3/8" s máxima $= \frac{2*71*240}{0.35*300} = 324 \text{ mm} \sim 0.32 \text{ m}$

Por lo anterior se colocarán 17 $\varepsilon\phi$ 3/8" c/0.20 a partir del borde del apoyo que cubrirán 3.20 m > 3.067 m necesarios.

Adicionalmente, por tratarse de una viga con refuerzo a compresión por flexión, se debe asegurar este refuerzo con estribos cuya separación máxima sea de 0.30 m (véase el problema 3.1).

A manera de comparación, se hace notar que la armadura transversal colocada de acuerdo a la expresión de resistencia a la fuerza de corte proporcionada por el concreto en función de la flexión es inferior a la que se necesita cuando ϕV_c se calcula como $\phi 0.17\sqrt{f'_c} b_w d$. Sin embargo, se comparte la opinión con algunos autores en el sentido de que falta investigación al respecto y que por lo tanto el diseñador debe proceder con prudencia en este tipo de trabajos.

TORSION

A continuación una breve presentación de este tema incluyendo un ejemplo de diseño.

Se puede definir como el efecto de fuerzas exteriores torsionales que "tienden a retorcer al elemento con respecto a su eje longitudinal".

Se consideran dos clases de torsión: torsión primaria, llamada también torsión de equilibrio o torsión estáticamente determinada, y se presenta cuando la carga externa no puede ser resistida sino por la torsión, como por ejemplo la existente sobre la viga que soporta una losa en voladizo; existe también la torsión secundaria, llamada también torsión por compatibilidad o torsión estáticamente indeterminada y se presenta a partir de los requisitos de continuidad o de compatibilidad de deformaciones entre las partes adyacentes de una estructura, como por ejemplo la torsión provocada en la viga perimetral que soporta las cargas de las viguetas que allí terminan.

El procedimiento presentado en el Reglamento NSR-10 para el diseño de la armadura a torsión contempla un primer paso en el cual se determina si la torsión debe considerarse, diciendo que "se permite despreciar los efectos de la torsión si el momento torsional mayorado Tu es menor que :

$$T_u < \phi 0.083\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^{\ 2}}{p_{cp}}\right), \text{ en donde:}$$

T_u = momento de torsión mayorado en la sección;

A_{cp} = área encerrada por el perímetro exterior de la sección transversal de concreto, en mm^2;

P_{cp} = perímetro exterior de la sección transversal de concreto A_{cp}, en mm;

ϕ = factor de reducción de resistencia igual a 0.75 para torsión".

Una vez se ha determinado que la torsión debe considerarse, se debe verificar que la sección sea suficiente, para lo cual debe cumplirse que:

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 * A_{oh}^{\ 2}}\right)^2} \le \phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + 0.66\sqrt{f'_c}\right), \text{ en donde:}$$

V_u = fuerza cortante mayorada en la sección, en MPa;

p_h = perímetro del eje del refuerzo transversal cerrado mas externo dispuesto para torsión en mm;

A_{oh} = área encerrada por el eje del refuerzo transversal cerrado mas externo dispuesto para recibir torsión expresada en mm^2;

V_c = resistencia nominal al cortante proporcionada por el concreto, en MPa.

Una vez se ha determinado que la sección es suficiente, se determina el refuerzo transversal para torsión a partir de:

$\phi T_n > T_u$ en donde

$$T_n = \frac{2A_o A_t f_{yt}}{s}\cot\theta \ge \frac{T_u}{\phi},$$

con:

T_n = resistencia nominal a la torsión;

A_o = área bruta encerrada por la trayectoria del flujo de cortante, expresada en mm^2. Se puede tomar como $0.85A_{oh}$

A_t = área de una rama de un estribo cerrado que resiste la torsión, con un espaciamiento s, expresada en mm^2;

f_{yt} = resistencia especificada a la fluencia f_y del refuerzo transversal para torsión, expresada en MPa;

s = espaciamiento medido centro a centro del refuerzo a cortante o a torsión en una dirección paralela al refuerzo longitudinal, expresado en mm;

θ = ángulo entre el eje de las diagonales de compresión en la analogía de celosía para torsión, en grados. No debe tomarse menor de 30° ni mayor de 60°. Se puede tomar $\theta = 45^\circ$

El espaciamiento del refuerzo transversal para torsión así colocado, no debe exceder el menor valor entre $p_h / 8$ y 300 mm.

Donde se requiera refuerzo para torsión, el área mínima de estribos cerrados combinada con la correspondiente a la fuerza cortante debe cumplir:

$$A_v + 2A_t = 0.62\sqrt{f'_c}\frac{b_w s}{f_{yt}} \geq (0.35 b_w s)/f_{yt}, \qquad \text{en donde:}$$

A_v = área del refuerzo de cortante con un espaciamiento s, expresado en mm^2;

b_w = ancho del alma, expresado en mm.

A continuación se calcula el refuerzo longitudinal para torsión con la siguiente expresión que especifica el área mínima total de dicho refuerzo:

$$A_{l,min} = \frac{0.42\sqrt{f'_c}A_{cp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s}\right)p_h * \frac{f_{yt}}{f_y} \qquad \text{en donde:}$$

f_y = resistencia especificada a la fluencia f_y del refuerzo longitudinal para torsión, expresada en MPa, y

A_t/s No debe tomarse menor que $0.175 b_w/f_{yt}$ en donde f_{yt} se refiere al refuerzo trasversal cerrado para torsión.

El refuerzo longitudinal para torsión, así calculado, debe distribuirse alrededor del perímetro de los estribos cerrados con un máximo espaciamiento entre barras de 300 mm. Las barras longitudinales deben colocarse dentro de los estribos y por lo menos una barra longitudinal en cada esquina del estribo. Las barras longitudinales deben tener un diámetro de al menos 0.042 veces el del espaciamiento entre estribos y no deben ser menores a la barra N° 3 (ϕ 3/8") o 10M (10mm).

El refuerzo a torsión tanto longitudinal como transversal debe llevarse por una distancia mayor a (b_t + d) más allá del punto donde ya no se necesite por análisis, en donde "b_t" es el ancho de la sección transversal del elemento que contiene los estribos cerrados que resisten la torsión.

A continuación un ejemplo de aplicación de los conceptos anteriores.

Problema 3.3

La viga continua de 0.35 x 0.35 m de la figura, apoyada en columnas cuadradas de lado 0.35 m, soporta un ático en mampostería de ladrillo macizo de 1.20 m de altura y un alero en losa maciza de espesor 0.14 m, que sobresale 1.40 m con respecto al borde de la viga o de la fachada. Calcular la armadura necesaria a la fuerza cortante y la torsión, si se utiliza concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero de refuerzo para f_y = 420 MPa en todos los diámetros.

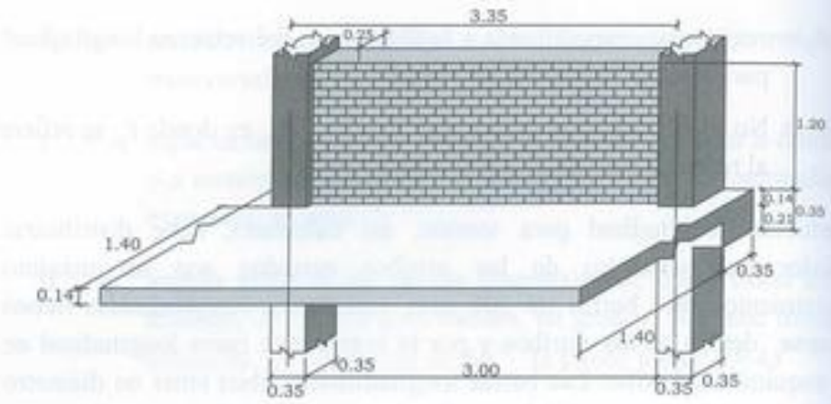


Figura 3.16

Solución

En el diseño de una viga como la propuesta se debe comenzar por el análisis de cargas de la estructura, continuar con el análisis y diseño estructural a flexión, cuyas áreas de refuerzo requeridas en este problema se asumen obtenidas con anterioridad, y terminar con el diseño a cortante y torsión.

1) Análisis de cargas

Del alero:

Peso propio de la losa:	0.14*1.00*1.00*24	=	3.36 kN/m^2
De alistado y desniveles:	0.03*1.00*1.00*22	=	0.66 kN/m^2
De impermeabilización:		=	0.15 kN/m^2
De pañete cielo raso:	0.02*1.00*1.00*22	=	0.44 kN/m^2
Subtotal (carga muerta)		=	4.61 kN/m^2

Carga viva: (aunque se considera alero no accesible se utiliza este valor a criterio del diseñador)		=	1.80 kN/m^2
Total:		=	6.41 kN/m^2

El alero cargará sobre la viga 6.41*1.40 = 8.97 kN/m, con una excentricidad de 0.875 m.

De la viga:

Peso propio de la viga:	0.35*0.35*1.00*24	=	2.94 kN/m
De pañete:	(0.35 + 0.35 + 0.21)*0.02*1.00*22	=	0.40 kN/m
Del ático:	0.25*1.20*1.00*18	=	5.40 kN/m
Total:		=	8.74 kN/m

Por tanto, la viga estará sometida a una carga uniforme total por metro de longitud de 8.97 + 8.74 = 17.71 kN/m y a un momento torsional por metro de longitud en el eje de la viga de 8.97*0.875 = 7.85 kN·m.

2) Diseño a flexión

De acuerdo con lo arriba expresado, el refuerzo requerido a flexión se calculó en otro capítulo y corresponde a la cuantía mínima, es decir:

$$A_s = 0.0033*0.35*0.28 = 0.000323 \text{ m}^2$$

3) Diseño del refuerzo a la fuerza cortante y la torsión

El corte a una distancia "d" del borde de las columnas será:

$$V = \frac{1}{2} * 17.71 * (3.35 - 0.35 - 0.56) = 21.61 \text{ kN}$$

Utilizando un factor de seguridad de 2.0 se obtiene:

$$V_u = 1.5*21.61 = 32.42 \text{ kN}$$

En la misma sección de cálculo y con el mismo factor de seguridad, el momento de torsión total será:

$$T_u = 1.5*7.85*\left(\frac{3.35}{2} - 0.175 - 0.28\right) = 14.37 \text{ kN·m}$$

En elementos no preesforzados la torsión se considera si:

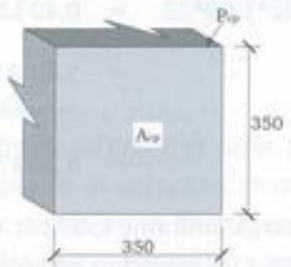


Figura 3.17

$T_u > \phi 0.083\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}\right)$, en donde:

$A_{cp} = 350*350 = 122500 \text{ mm}^2$

$p_{cp} = 2*(350 + 350) = 1400 \text{ mm}$

Remplazando:

$$0.75*0.083*\sqrt{21.1}*1000\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}*\left(\frac{0.1225^2\text{m}^4}{1.40\text{m}}\right) = 3.06 \text{ kN·m}$$

Luego $T_u > 3.06$ kN·m y por lo tanto la torsión debe considerarse.

A continuación debe determinarse si la sección es suficiente, para lo cual debe cumplirse:

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7A_{oh}^2}\right)^2} \le \phi*\left(\frac{V_c}{b_w d} + 0.66\sqrt{f'_c}\right), \quad \text{en donde}$$

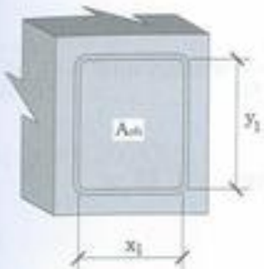


Figura 3.18

$p_h = 2*(x_1 + y_1)$

Para estribos de ϕ 1/2":

$x_1 = 350 - 80 - 12.7 = 257.3\text{mm} \sim 0.25$ m

$y_1 = 350 - 80 - 12.7 = 257.3\text{mm} \sim 0.25$ m

$p_h = 2*(0.25 + 0.25) = 1.00$ m

$A_{oh} = x_1*y_1 = 0.25*0.25 = 0.0625 \text{ m}^2 = 62500 \text{ mm}^2$

Reemplazando:

$$\sqrt{331^2 + \left(\frac{14.37*1.00}{1.7*0.0625^2}\right)^2} < 0.75*\left(0.78 + 0.66*\sqrt{21.1}\right)*1000$$

$2189 \text{ kN/m}^2 < 2858 \text{ kN/m}^2$

luego, la sección es suficiente.

Refuerzo transversal para la fuerza cortante

El refuerzo transversal para la fuerza cortante se determina a partir de . $\phi V_s \ge (V_u - \phi V_c)$ En este caso $\phi V_c = 57.35$,es mayor que V_u, por lo que se colocan estribos ϕ 1/2" a la menor de las siguientes separaciones:

d/2 = 0.14m y

$$A_{v,min} = \frac{0.062\sqrt{f'_c}b_w s}{f_{yt}} \ge \frac{0.35b_w s}{f_{yt}} \quad \text{de donde,}$$

$$s_{max} = \frac{A_v f_{yt}}{0.062\sqrt{f'_c} b_w} = \frac{2*129*420}{0.062\sqrt{21.1}*350} = 1088 \text{ mm} \sim 1.09 \text{ m}$$

$$s_{max} = \frac{A_v f_{yt}}{0.35 b_w} = \frac{2*129*420}{0.35*350} = 885 \text{ mm} \sim 0.88 \text{ m}$$

Refuerzo transversal para torsión:

Se calcula a partir de: $T_n = \frac{2A_o A_t * f_{yt}}{s}\cot\theta \geq \frac{T_u}{\phi}$, en donde:

A_o se puede tomar como $0.85*A_{oh} = 0.85*0.0625 = 0.0531$ m^2 y θ debe estar entre 30° y 60°; para este caso se puede tomar 45°.

Remplazando e igualando:

$$\frac{2*0.0531*0.0000129*420000}{s}\cot 45° = \frac{14.37}{0.75}$$

Por tanto s = 0.30 m, pero no debe exceder de $p_h/8 = 1.00/8 = 0.125$ m, ni de 0.30 m. Por consiguiente se colocarán ε ϕ 1/2" c/0.125 m.

Refuerzo transversal combinado para la fuerza cortante y torsión:

$$\frac{A_{v+t}}{s} = \frac{A_v}{s} + \frac{2A_t}{s} = \frac{0.000258}{0.14} + \frac{0.000258}{0.125} = 0.00391$$

para estribos ϕ 1/2": s = 0.000258/0.00391 = 0.066 adoptamos 0.065 m

Este espaciamiento debe cumplir:

$$\frac{A_v + 2A_t}{b_w s} \geq 0.062\frac{\sqrt{f'_c}}{f_{yt}} \geq \frac{0.35}{f_{yt}}, \quad \text{remplazando:}$$

$$\frac{258}{350*65} > 0.00068 > 0.00083$$

$0.0113 > 0.00083$, resultando correcta la separación de 0.065 m.

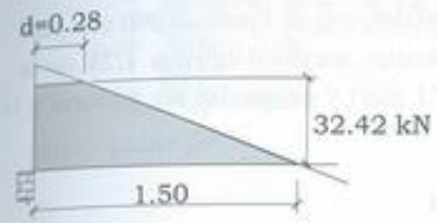


Figura 3.19

Se observa en este caso muy frecuente de carga uniformemente distribuida y un momento de torsión aplicado y distribuido de igual forma, que tanto V_u como T_u disminuyen linealmente hasta anularse en la mitad de la luz.

Por tanto, los requerimientos de refuerzo para cortante y torsión seguirán una misma variación, lo cual, si se puede, significaría un aumento en la separación de estribos, entre otras posibilidades. Sin embargo, en cualquier caso es preferible remitirse al criterio del diseñador para la correcta colocación de estas armaduras. En este caso, por ejemplo, se colocan estribos para la fuerza cortante sin que estrictamente se necesiten y respecto a los estribos para torsión, que deben llevarse sólo hasta una distancia (d + b) más allá del punto donde ya no son teóricamente necesarios, se especifican estribos a todo lo largo de la viga. Al distribuirlos resultan 47 ε ϕ 1/2" c/0.065 m.

Refuerzo longitudinal

Corresponde a la siguiente expresión:

$$A_l = \frac{A_t}{s} * p_h \left(\frac{f_{yt}}{f_y}\right)\cot^2\theta = \frac{0.000129}{0.30} * 1.00 * \frac{420}{420}\cot^2 45° = 0.000430 \text{ m}^2$$

en donde θ y $\frac{A_t}{s}$ deben tomarse como los calculados en

$$T_n = \frac{2A_o A_t f_{yv}}{s}\cot\theta.$$

Se deben colocar 0.000430 m^2 longitudinales, con un límite de 300 mm para la separación entre barras, con un diámetro mayor o igual a 1/24 de la separación entre estribos (65/24 = 2.71 mm) y no pueden ser menores a la barra N° 3.

Resumen de la armadura longitudinal

Arriba

$$\frac{0.000430}{3} + 0.000323 = 0.000466\ m^2 - 1\ \phi\ 1/2" + 2\ \phi\ 5/8"\ (527\ mm^2)$$

Medio

$$\frac{0.000430}{3} = 0.000143\ m^2 - 2\ \phi\ 1/2"\ (258\ mm^2)$$

Abajo

$$\frac{0.000430}{3} + 0.000323 = 0.000466\ m^2 - 1\ \phi\ 1/2" + 2\ \phi\ 5/8"\ (527\ mm^2)$$

Refuerzo a flexión en la losa maciza del alero:

A partir de su diseño, previamente efectuado, se especifican ϕ 1/4" c/0.11 m para el voladizo y 11 ϕ 1/4" c/0.125 m de repartición.

Detalle del refuerzo:

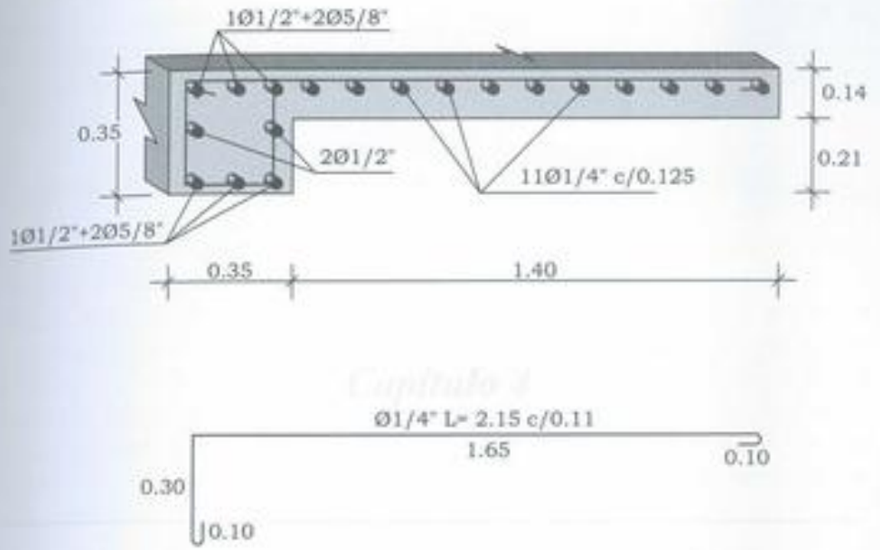


Figura 3.20

Capítulo 4

LONGITUD DE DESARROLLO Y EMPALMES DE REFUERZO

LONGITUD DE DESARROLLO Y EMPALMES DE REFUERZO

En este capítulo se hará referencia a las definiciones y especificaciones que trae el Reglamento NSR-10 sobre este tema, adicionando tabulaciones de longitudes de desarrollo y ganchos estándar, un esquema muy general de los puntos de corte del refuerzo como ayuda didáctica y un ejemplo de aplicación.

Longitud de desarrollo del refuerzo

La define el Reglamento colombiano como la longitud del refuerzo embebido dentro del concreto, requerida para desarrollar la resistencia de diseño del refuerzo en una sección crítica. Por tanto, la tracción o compresión en el refuerzo calculada en cada sección de los elementos de concreto reforzado debe desarrollarse en cada lado de dicha sección mediante longitud embebida en el concreto, por medio de gancho, barra corrugada con cabeza, dispositivo mecánico o una combinación de los anteriores. Los ganchos barras y corrugadas con cabeza no se deben emplear para desarrollar barras en compresión.

Desarrollo del refuerzo a flexión

Las secciones críticas para el desarrollo del refuerzo en los elementos a flexión corresponden a los puntos de esfuerzos máximos, y en los sitios dentro de la luz donde termina o se dobla el refuerzo adyacente.

El refuerzo debe extenderse más allá del punto en el cual ya no se requiera para resistir la flexión, por una distancia igual a la altura efectiva "d" del elemento, o $12d_b$, la que sea mayor, excepto en los apoyos de luces simples y en el extremo libre de los voladizos. Además, el refuerzo que se prolonga debe tener una longitud embebida no menor que la longitud de desarrollo ℓ_d más allá del punto donde se dobla o termina el refuerzo a tracción que ya no se requiera para resistir flexión.

El refuerzo a flexión no debe suspenderse en la zona de tracción, a menos que se cumpla una de las siguientes condiciones:

- Que el cortante mayorado V_u en el punto de suspensión no exceda los 2/3 de la resistencia de diseño a cortante, ϕV_n ,incluyendo la resistencia a cortante del refuerzo para cortante suministrado.
- Que se proporcione un área de estribos adicional a la que se requiere para cortante y torsión a lo largo de cada terminación de barra o alambre de malla electrosoldada, por una distancia igual a 3/4 de la altura efectiva del elemento, a partir del punto de terminación. El área de estribos A_v adicional no debe ser menor que $0.41b_w s/f_{yt}$. El espaciamiento s no debe exceder de $d/8\beta_b$, donde β_b es la relación entre el área del refuerzo interrumpido en una seccion y el área total del refuerzo a tracción en esa sección.
- Que para barras N°36M y menores, el refuerzo que continúa sea el doble del área requerida por flexión en el punto de interrupción y el cortante mayorado V_u no exceda el 75% de la resistencia de diseño a cortante ϕV_n.

Se debe dar anclaje externo adecuado al refuerzo a tracción en elementos sometidos a flexión donde la tracción del refuerzo no sea directamente proporcional al momento, como es el caso de zapatas inclinadas, escalonadas o de sección variable, en ménsulas, en elementos de gran altura sometidos a flexión o elementos en los cuales el refuerzo a tracción no sea paralelo a la cara de compresión.

Desarrollo del refuerzo para momento positivo

El Reglamento colombiano especifica que por lo menos 1/3 del refuerzo para momento positivo en elementos simplemente apoyados y 1/4 del refuerzo para momento positivo en elementos continuos, debe prolongarse a lo largo de la misma cara del elemento dentro del apoyo, y en vigas esta extensión no debe ser menor de 150 mm dentro del apoyo.

Cuando un elemento a flexión haga parte de un sistema primario resistente a fuerzas horizontales, el refuerzo positivo que se extiende dentro del apoyo

debe anclarse para desarrollar la resistencia nominal a la fluencia f_y a tracción en la cara del apoyo.

En apoyos simples y en puntos de inflexión, el refuerzo a tracción para momento positivo debe limitarse a un diámetro tal que ℓ_d calculada para f_y cumpla la condición de la expresión:

$$\ell_d \leq \frac{M_n}{V_u} + \ell_a$$

donde:

M_n = resistencia nominal a momento, obtenida suponiendo que todo el refuerzo de la sección está trabajando a un esfuerzo de tracción igual a la resistencia nominal a la fluencia f_y;

V_u = fuerza cortante mayorada en la sección;

ℓ_a = en un apoyo es igual a la longitud de anclaje más allá del centro del apoyo. En el punto de inflexión debe limitarse a la altura efectiva del elemento d o a $12d_b$, la que sea mayor.

En aquellos casos en los cuales el refuerzo termina después del centro de un apoyo simple, con un gancho estándar en su extremo, o se disponga un anclaje mecánico equivalente a un gancho estándar, no hay necesidad de cumplir la ecuación anterior.

El valor de M_n/V_u puede aumentarse en un 30% cuando los extremos del refuerzo estén confinados por una reacción de compresión.

Desarrollo del refuerzo para momento negativo

El Reglamento colombiano especifica que el refuerzo para momento negativo en un elemento continuo, restringido o en voladizo, o en cualquier elemento de un pórtico rígido resistente a momentos, debe anclarse en el

elemento que le da apoyo o a través del mismo, mediante la longitud embebida, por medio de ganchos o con anclaje mecánico.

Al menos 1/3 del refuerzo total a tracción suministrado para momento negativo en un apoyo debe tener una longitud embebida, más allá del punto de inflexión, no menor que la altura efectiva del elemento d, $12d_b$ o 1/6 de la luz libre, la que sea mayor.

Empalmes de refuerzo

Los empalmes del refuerzo pueden ser por traslapo, empalmes mecánicos y empalmes soldados y deben diseñarse de acuerdo a los requisitos del Reglamento colombiano.

Los empalmes por traslapo no pueden utilizarse para barras mayores de la N°36; las barras empalmadas por traslapos que no estén en contacto, en elementos a flexión, no deben espaciarse transversalmente a más de 1/5 de la longitud requerida para el empalme traslapado, ni más de 150 mm.

Toda conexión mecánica total debe desarrollar, a tracción o a compresión, según se requiera, al menos un 125% de la resistencia nominal a la fluencia f_y de la barra $(1.25f_y)$.

Todo empalme totalmente soldado debe estar formado por barras soldadas para que desarrolle a tracción al menos un 125% de la resistencia nominal a la fluencia f_y de la barra $(1.25f_y)$.

Empalmes a tracción de barras corrugadas y de alambres corrugados de mallas electrosoldadas

La longitud mínima de traslapo para empalmes a tracción de las clases A y B no debe ser menor de 300 mm, donde:

Empalme Clase A ..... $1.0\ell_d$

Empalme Clase B ..... $1.3\ell_d$

donde ℓ_d es la longitud de desarrollo a tracción para barras corrugadas, alambres corrugados, refuerzo electrosoldado de alambre liso o corrugado o torones de preesfuerzo, para la resistencia nominal a la fluencia f_y, sin el factor de modificación.

Los empalmes por traslapo a tracción de barras corrugadas y alambres corrugados que formen parte de mallas electrosoldadas, deben ser Clase B, excepto que se permiten los de Clase A cuando el área de refuerzo suministrado es al menos el doble del requerido por análisis en toda la longitud del empalme y la mitad o menos del refuerzo total que se empalma dentro de la longitud de traslapo, como lo indica la tabla siguiente.

Tabla 4.1

Empalmes a Tracción por Traslapo

$\frac{A_s \text{ suministrado}}{A_s \text{ requerido}}$	Porcentaje máximo de A_s, empalmado dentro de la longitud de traslapo requerida	
	50	100
Mayor o igual a 2	Clase A	Clase B
Menor que 2	Clase B	Clase B

Empalmes de barras corrugadas a compresión

La longitud mínima para empalmes traslapados a compresión es $0.071f_y d_b$ para f_y de 420 MPa o menos o $(0.13f_y - 24)d_b$ para f_y mayor de 420MPa y no debe ser menor de 300 mm. Para f'_c menores de 21MPa, la longitud de traslapo debe incrementarse en un tercio (1/3).

Cuando se empalmen por traslapo a compresión barras de diferente diámetro, la longitud del empalme por traslapo debe ser ℓ_s mayor de ℓ_{dc} la longitud de desarrollo de la barra mayor o de la longitud de traslapo de la barra menor.

Empalmes en columnas

Deben utilizarse empalmes por traslapo, empalmes mecánicos, empalmes soldados a tope, conexiones mecánicas o empalmes a tope en el extremo y el empalme debe cumplir los requisitos dados para todas las combinaciones de carga en la columna. De acuerdo al esquema de la figura 4.1, se requieren empalmes para refuerzo en las barras de compresión, esfuerzo en las barras de tracción sin exceder $0.5f_y$, clase A, y cuando el esfuerzo en las barras excede en tracción $0.5f_y$, clase B

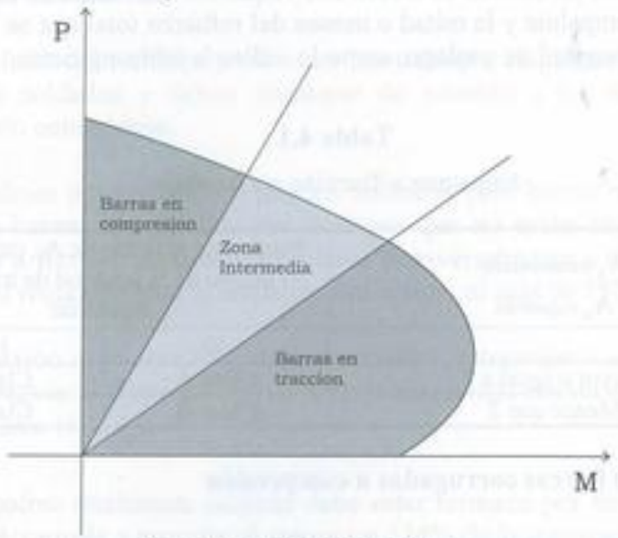


Diagrama de interacción

Figura 4.1

Ganchos Estándar

El término "gancho estándar", significa un doblez en el extremo de la barra de refuerzo que cumple los siguientes requisitos del Reglamento colombiano:

a) Un doblez de 180° más una extensión recta de longitud mínima igual a $4d_b$, pero no menor de 65 mm en el extremo libre de la barra.

b) Un doblez de 90° más una extensión de longitud mínima igual a $12d_b$ en el extremo libre de la barra.

c) Para estribos:

- Un doblez a 90° con una extensión recta de longitud mínima igual a $6d_b$ para barras No.5 (5/8") y 16M (16 mm) o menores.
- Un doblez a 90° con una extensión recta de longitud mínima igual a $12d_b$ para barras No.6 (3/4") y 20M (20 mm) a No.8 (1") y 25M (25mm).
- Para barras No.8 (1") y 25M (25mm) y menores con ganchos de 135°, la longitud mínima de la parte recta en el extremo libre es de $6d_b$.
- En los estribos de confinamiento requeridos por el Reglamento en estructuras de capacidad de disipación de energía moderada (DMO) y especial (DES), para construcción sismo-resistente, deben emplearse ganchos sísmicos con un doblez de 135° o más y una extensión recta de $6d_b$ pero no menor de 75 mm, que abraza el refuerzo longitudinal del elemento y se proyecta hacia el interior de la sección. En los estribos suplementarios el doblez en los extremos debe ser un gancho sísmico de 135° o más, con una extensión recta de $6d_b$ pero no menor de 75 mm, y se permite que en uno de los extremos se utilice un gancho de 90° o más, con una extensión de $6d_b$.

Diámetros mínimos de doblamiento

El diámetro interior para el doblamiento de las barras del refuerzo principal, no debe ser menor que los valores mínimos dados en la siguiente tabla.

Tabla 4.1a

Diámetros mínimos de doblamiento

Barra	Diámetro mínimo de doblamiento
No.3 (1/4") a No.8 (1") 10M (10 mm) a 25M (25 mm)	$6d_b$
No.9 (1⅛") a No.11(1⅜") 30M (30 mm) a 36 M (36mm)	$8d_b$
No.14 (1¾") y No.18 (2¼") 45M (45 mm) y 55M (55 mm)	$10d_b$

El diámetro interior de doblamiento de estribos de barras No.5 (5/8") ó 16M (16 mm) o menor, no debe ser inferior a $4d_b$ y para barras mayores a la N°5 (5/8") ó 16M (16mm) se deben cumplir los diámetros mínimos indicados en la tabla anterior.

Tablas para ganchos estándar

A continuación aparecen dos tablas que contienen, entre otras, las longitudes en mm (B) de los ganchos estándar (doblez a 180° y doblez a 90°) y lo que es más útil, la longitud adicional de la barra hasta el recubrimiento, necesaria para formar 1 o 2 ganchos, para los aceros de uso frecuente en nuestro medio y aproximadas en forma conveniente.

Tabla 4.2

Longitudes para ganchos estándar a 180° - f_y = 240 y 420 MPa

Barra No.	Diámetro barra mm	E mm	D mm	C mm	B mm	A mm	Longitud adicional de barra (mm)	
							1 gancho	2ganchos
2	6.4	65	38	45	135	110	100	200
3	9.5	65	57	67	169	131	130	260
4	12.7	65	76	89	205	154	155	310
5	15.9	65	95	111	240	176	175	350
6	19.1	76	115	134	286	210	225	450
7	22.2	89	133	155	333	244	250	500
8	25.4	102	152	178	381	279	275	550
9	28.7	115	230	258	521	377	375	750
10	32.3	129	258	291	586	424	425	850
11	35.8	143	286	322	649	470	475	950
14	43.0	172	430	473	915	657	650	1300
18	57.3	229	573	630	1219	875	875	1750

Tabla 4.3

Longitudes para ganchos estándar a 90° - f_y = 240 y 420 MPa

Barra No.	Diámetro barra mm	E mm	D mm	C mm	B mm	A mm	Longitud adicional de barra (mm)	
							1 gancho	2 ganchos
2	6.4	77	38	22	112	86	100	200
3	9.5	114	57	33	166	128	125	250
4	12.7	152	76	44	222	171	175	350
5	15.9	191	95	56	278	215	225	450
6	19.1	229	115	67	334	258	250	500
7	22.2	266	133	78	388	300	300	600
8	25.4	305	152	89	444	343	350	700
9	28.7	344	230	129	547	404	400	800
10	32.3	388	258	145	616	454	450	900
11	35.8	430	286	161	683	504	500	1000
14	43.0	516	430	237	887	629	650	1300
18	57.3	688	573	315	1183	839	850	1700

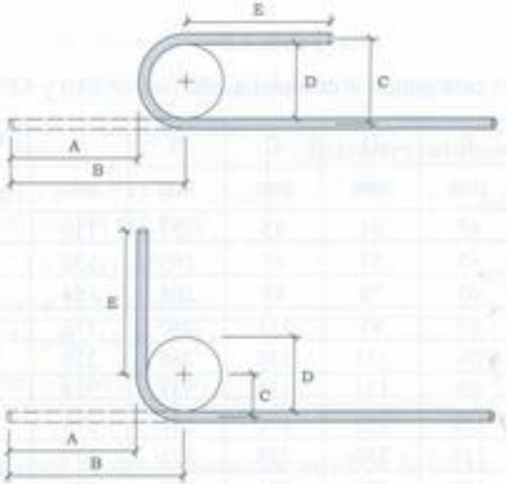


Figura 4.2

Tablas para ganchos de estribos

A continuación se presentan las tablas que contienen, entre otras, las longitudes en mm (B) de los ganchos para estribos con doblez de 90° y 135°, y la longitud adicional de la barra hasta el recubrimiento, necesaria para formar 1 o 2 ganchos, aproximada en forma conveniente.

Tabla 4.4

Longitudes de ganchos para estribos. Doblez a 90°

Barra No.	Diámetro barra mm	E mm	D mm	C mm	B mm	A mm	Longitud adicional de barra (mm)	
							1 gancho	2 ganchos
2	6.4	38	26	16	63	44	50	100
3	9.5	57	38	24	95	67	75	150
4	12.7	76	51	32	126	88	100	200
5	15.9	95	64	40	158	110	125	250
6	19.1	229	115	67	334	257	250	500
7	22.2	266	133	78	389	300	300	600
8	25.4	305	152	89	445	344	350	700

Tabla 4.5

Longitudes de ganchos para estribos. Doblez a 135°

Barra No.	Diámetro barra mm	E mm	D mm	C mm	B mm	A mm	Longitud adicional de barra (mm)	
							1 gancho	2 ganchos
2	6.4	38	26	16	76	57	75	150
3	9.5	57	38	24	114	86	100	200
4	12.7	76	51	32	151	113	125	250
5	15.9	95	64	40	189	141	150	300
6	19.1	115	115	67	272	196	200	400
7	22.2	133	133	78	317	228	225	450
8	25.4	152	152	89	362	261	275	550

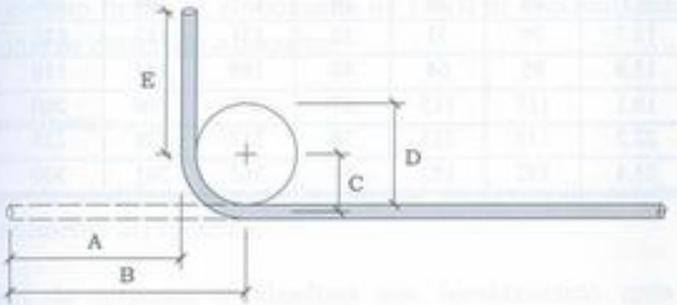


Figura 4.3

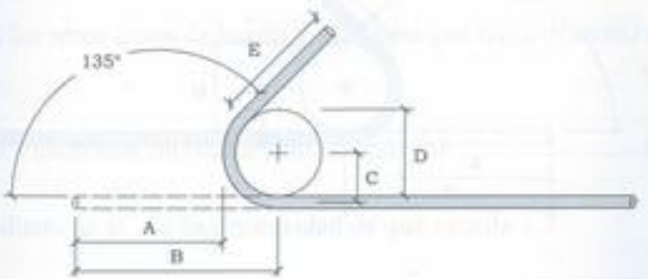


Figura 4.4

Tabla para ganchos de estribos de confinamiento

A continuación se presenta una tabla que contiene la longitud en mm (B) de los ganchos para estribos de confinamiento en estructuras con capacidad de disipación moderada (DMO) y especial (DES), con doblez a 135° y la longitud adicional de la barra hasta el recubrimiento, necesaria para formar 1 o 2 ganchos, aproximada en forma conveniente.

Tabla 4.6

Longitudes de ganchos para estribos de confinamiento. Doblez a 135°

Barra No.	Diámetro barra mm	E mm	D mm	C mm	B mm	A mm	Longitud adicional de barra (mm)	
							1 gancho	2 ganchos
3	9.5	75	38	24	132	104	100	200
4	12.7	76	51	32	151	113	125	250
5	15.9	95	64	40	189	141	150	300
6	19.1	115	115	67	272	196	200	400
7	22.2	133	133	78	317	228	225	450
8	25.4	152	152	89	362	261	300	600

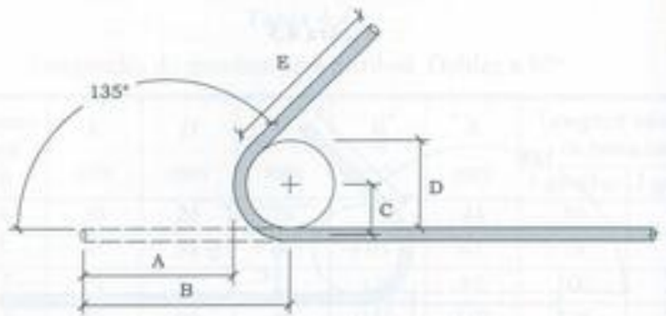


Figura 4.5

Longitud de desarrollo de barras corrugadas y alambre corrugado a tracción

La longitud de desarrollo ℓ_d, en términos de d_b para barras corrugadas y alambres corrugados a tracción, debe calcularse como el producto de la longitud de desarrollo básica y el factor o factores de modificación aplicables, pero ℓ_d no debe ser menor que 300 mm.

A continuación se define la nomenclatura básica:

ψ_t = factor de modificación para la longitud de desarrollo con base en la localización del refuerzo.

Refuerzo horizontal colocado de tal manera que haya más de 300 mm de concreto fresco en el momento de vaciar el concreto, debajo de la longitud de desarrollo o empalme ..... $\psi_t = 1.3$

Otro refuerzo ..... $\psi_t = 1.0$

ψ_e = factor de modificación para la longitud de desarrollo con base en el revestimiento del refuerzo.

Barras de refuerzo, o alambres con recubrimiento epóxico, con recubrimiento de concreto menor que $3d_b$, o separación libre entre barras menor que $6d_b$ ..... $\psi_e = 1.5$

Todos los otros casos de barras y alambres con recubrimiento epóxico $\psi_e = 1.2$

Barras y alambres sin recubrimiento epóxico ..... $\psi_e = 1.0$

El producto $\psi_t\psi_e$ no hay necesidad de que exceda 1.7

ψ_s= factor de modificación para la longitud de desarrollo con base en el tamaño del refuerzo.

Barras No. 6 (¾") o 20M (20 mm) o menos y alambre corrugado ..... $\psi_s = 0.8$

Barras No. (⅞") o 22M (22 mm) y mayores ..... $\psi_s = 1.0$

c_b = la menor de (a) la distancia medida del centro de una barra o alambre a la superficie mas cercana del concreto, o (b) la mitad de la separación centro a centro de las barras o alambres que se desarrollan.

Debe utilizarse la distancia desde el centro de la barra a la superficie más cercana del concreto, o la mitad de la separación centro a centro de las barras que se desarrollan, la menor de las dos.

K_{tr}= índice de refuerzo transversal = $\frac{40A_{tr}}{sn}$ donde:

A_{tr} = área total de todo el refuerzo transversal en forma de estribos, dentro de una distancia de espaciamiento s y que cruza un plano potencial de hendimiento adyacente al refuerzo que se desarrolla, en mm^2.

s = espaciamiento, centro a centro, del refuerzo transversal que existe en la longitud de desarrollo ℓ_d, expresado en mm.

n = número de barras en una misma fila o capa, que se empalman o desarrollan, a lo largo del plano de fractura.

Como una simplificación de diseño, se permite usar $K_{tr} = 0$ aunque haya refuerzo transversal presente.

Refuerzo en exceso

La longitud de desarrollo puede reducirse cuando el refuerzo en un elemento a flexión es mayor del que se requiere por análisis, excepto cuando el

anclaje o el desarrollo de f_y se requiera, o en estructuras con capacidad de disipación especial de energía DES.

La reducción puede hacerse en la siguiente proporción: $\frac{A_{s\ requerido}}{A_{s\ suministrado}}$

Longitud de desarrollo de barras corrugadas o alambres corrugados. Casos simplificados

Para barras corrugadas o alambre corrugado a tracción, el valor ℓ_d debe calcularse así:

Espaciamiento y recubrimiento	Barras No. 6 (3/4") o 20M (20 mm) o menores, y alambres corrugado.	Barras No. 7 (7/8") o 22M (22 mm) y mayores
Espaciamiento libre entre barras o alambres que están siendo empalmados o desarrolladas no menor que d_b, recubrimiento libre no menor que d_b, y estribos a lo largo de ℓ_d no menos que el mínimo del Título C del Reglamento NSR-10 o espaciamiento libre entre barras o alambres que están siendo desarrolladas o empalmadas no menor a 2 d_b y recubrimiento libre no menor a d_b	$\left(\frac{f_y\psi_t\psi_e}{2.1\lambda\sqrt{f'_c}}\right)d_b$	$\left(\frac{f_y\psi_t\psi_e}{1.7\lambda\sqrt{f'_c}}\right)d_b$
Otros casos (separación mínima entre barras según el Artículo C.7.6.1, recubrimiento mínimo según la Sección C.7.7 y sin estribos mínimos)	$\left(\frac{f_y\psi_t\psi_e}{1.4\lambda\sqrt{f'_c}}\right)d_b$	$\left(\frac{f_y\psi_t\psi_e}{1.1\lambda\sqrt{f'_c}}\right)d_b$

A continuación, una tabulación de las longitudes de desarrollo de barras corrugadas a tracción para los casos simplificados y distintas combinaciones de ψ_t, ψ_e, ψ_s y c_b y para los aceros de f_y = 420 y 240 MPa.

Tabla 4.7

Longitud de desarrollo para barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.0$

$f_y = 420$ MPa $\psi_e = 1.0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	341	306	300	300	300	300	300	300	300
3	506	453	414	384	359	338	321	306	300
4	677	606	553	513	480	452	429	409	392
5	847	759	693	642	600	565	536	512	490
6	1018	911	832	771	721	679	644	615	589
7	1461	1308	1195	1106	1035	975	925	882	845
8	1672	1496	1367	1266	1184	1115	1058	1009	967
9	1889	1691	1544	1430	1338	1260	1196	1140	1092
10	2126	1903	1738	1609	1506	1418	1346	1283	1229

$\psi_t = 1.0$

$f_y = 240$ MPa $\psi_e = 1.0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	387	346	316	300	300	300	300	300	300
5	484	434	396	367	343	323	307	300	300
6	582	521	476	441	412	388	368	351	337
7	835	748	683	632	592	557	529	504	483
8	955	855	781	723	677	637	605	577	553
9	1080	966	883	817	765	720	683	652	624
10	1215	1087	993	920	861	810	769	734	702

Artículo C. 12. 2. 2. Casos simplificados

Separación libre entre barras, que se desarrollan o empalman, mayor o igual a d_b, estribos a lo largo de ℓ_d cumpliendo el mínimo requerido o separación libre entre barras, que se desarrollan o empalman, mayor o igual a $2d_b$, y recubrimiento libre mayor o igual a d_b.

Tabla 4.8

Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.0$

$f_y = 420$ MPa $\psi_e = 1.0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	512	458	418	388	363	342	324	309	300
3	759	680	621	575	538	507	481	459	439
4	1015	909	830	769	719	677	643	613	587
5	1271	1138	1039	962	900	848	804	767	735
6	1526	1366	1248	1156	1081	1018	966	922	883
7	2258	2021	1846	1709	1600	1506	1429	1363	1305
8	2583	2312	2112	1956	1830	1723	1635	1559	1493
9	2919	2613	2386	2210	2068	1947	1848	1762	1687
10	3285	2940	2685	2487	2327	2191	2079	1983	1899

$\psi_t = 1.0$

$f_y = 240$ MPa $\psi_e = 1.0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	434	389	355	329	308	300	300	300	300
4	580	519	474	439	411	387	367	350	336
5	726	650	594	550	515	485	460	439	420
6	872	781	713	661	618	582	552	527	505
7	1290	1155	1055	977	914	861	817	779	746
8	1476	1321	1207	1118	1046	985	935	891	854
9	1668	1493	1364	1263	1182	1113	1056	1007	964
10	1877	1680	1535	1421	1330	1252	1188	1133	1085

Artículo C. 12. 2. 2. Casos simplificados

Otros casos (separación mínima entre barras según el Artículo C.7.6.1, recubrimiento mínimo según la Sección C.7.7 y sin estribos mínimos)

Longitud de desarrollo de barras corrugadas o alambres corrugados a tracción

Caso general

Para barras corrugadas o alambre corrugado el valor ℓ_d debe calcularse utilizando la ecuación:

$$\ell_d = \left(\frac{f_y}{1.1\sqrt{f'_c}} \frac{\psi_t \psi_e \psi_s}{\left[\frac{(c_b + K_{tr})}{d_b} \right]} \right) d_b \qquad \text{y} \qquad \left[\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right] \leq 2.5$$

A continuación, una tabulación de las longitudes de desarrollo de barras corrugadas a tracción para el caso general y distintas combinaciones de ψ_t, ψ_e, ψ_s y c_b y los aceros de f_y = 420 y 240 MPa.

Tabla 4.9
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

ψ_t = 1.0 c_b (mm) = 40
f_y = 420 MPa ψ_e = 1.0 K_{tr} = 0

f'_c (MPa) / Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	310	300	300	300	300	300	300	300	300
4	414	370	338	313	300	300	300	300	300
5	518	464	423	392	367	346	328	313	300
6	742	665	607	562	526	495	470	448	429
7	1253	1122	1025	949	888	836	793	757	725
8	1641	1468	1341	1242	1162	1094	1038	990	948
9	2094	1875	1712	1586	1484	1397	1326	1264	1211
10	2653	2374	2169	2008	1879	1769	1679	1601	1534

ψ_t = 1.0 c_b (mm) = 40
f_y = 240 MPa ψ_{tr} = 1.0 K_{tr} = 0

f'_c (MPa) / Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	300	300	300	300	300	300	300	300	300
5	300	300	300	300	300	300	300	300	300
6	424	380	347	321	301	300	300	300	300
7	716	641	586	542	508	478	454	433	414
8	938	839	767	710	664	626	594	566	542
9	1197	1071	979	906	848	798	758	723	692
10	1516	1357	1239	1148	1074	1011	960	915	877

Artículo C.12.2.3. Caso general

Tabla 4.10
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.0$ c_b (mm) = 45

f_y = 420 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	310	300	300	300	300	300	300	300	300
4	414	370	338	313	300	300	300	300	300
5	518	464	423	392	367	346	328	313	300
6	660	591	540	500	468	440	418	399	382
7	1114	997	911	844	789	743	705	673	644
8	1458	1305	1192	1104	1033	973	923	880	843
9	1862	1666	1522	1410	1319	1242	1178	1124	1076
10	2358	2111	1928	1785	1670	1573	1493	1423	1363

$\psi_t = 1.0$ c_b (mm) = 45

f_y = 240 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	300	300	300	300	300	300	300	300	300
5	300	300	300	300	300	300	300	300	300
6	377	338	309	300	300	300	300	300	300
7	637	570	521	482	451	425	403	385	368
8	834	746	681	631	591	556	528	503	482
9	1064	952	870	806	754	710	674	642	615
10	1348	1206	1102	1020	955	899	853	814	779

Artículo C.12.2.3. Caso general

Tabla 4.11
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.0$ c_b (mm) = 50

f_y = 420 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	310	300	300	300	300	300	300	300	300
4	414	370	338	313	300	300	300	300	300
5	518	464	423	392	367	346	328	313	300
6	622	557	509	471	441	415	394	376	360
7	1003	898	820	759	710	669	635	605	580
8	1313	1175	1073	994	930	876	831	792	759
9	1676	1500	1370	1269	1187	1118	1061	1012	969
10	2122	1900	1735	1607	1503	1416	1343	1281	1227

$\psi_t = 1.0$ c_b (mm) = 50

f_y = 240 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	300	300	300	300	300	300	300	300	300
5	300	300	300	300	300	300	300	300	300
6	356	318	300	300	300	300	300	300	300
7	573	513	469	434	406	382	363	346	332
8	750	672	613	568	532	501	475	453	434
9	958	857	783	725	679	639	606	578	554
10	1213	1086	992	918	859	809	768	732	701

Artículo C.12.2.3. Caso general

Tabla 4.12
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.0$ c_b (mm) = 55
f_y = 420 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	310	300	300	300	300	300	300	300	300
4	414	370	338	313	300	300	300	300	300
5	518	464	423	392	367	346	328	313	300
6	622	557	509	471	441	415	394	376	360
7	912	816	745	690	646	608	577	550	527
8	1193	1068	976	904	845	796	755	720	690
9	1523	1364	1245	1153	1079	1016	964	920	881
10	1929	1727	1577	1461	1367	1287	1221	1165	1115

$\psi_t = 1.0$ c_b (mm) = 55
f_y = 240 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	300	300	300	300	300	300	300	300	300
5	300	300	300	300	300	300	300	300	300
6	356	318	300	300	300	300	300	300	300
7	521	467	426	395	369	348	330	315	301
8	682	611	558	517	483	455	432	412	394
9	871	779	712	659	617	581	551	526	503
10	1103	987	901	835	781	736	698	666	638

Artículo C.12.2.3. Caso general

Tabla 4.13
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.0$ c_b (mm) = 60
f_y = 420 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	310	300	300	300	300	300	300	300	300
4	414	370	338	313	300	300	300	300	300
5	518	464	423	392	367	346	328	313	300
6	622	557	509	471	441	415	394	376	360
7	903	809	739	684	640	603	572	546	522
8	1094	979	894	828	775	730	692	660	632
9	1396	1250	1142	1057	989	931	884	843	807
10	1769	1583	1446	1339	1253	1180	1120	1068	1023

$\psi_t = 1.0$ c_b (mm) = 60
f_y = 240 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	300	300	300	300	300	300	300	300	300
5	300	300	300	300	300	300	300	300	300
6	356	318	300	300	300	300	300	300	300
7	516	462	422	391	366	345	327	312	300
8	625	560	511	474	443	417	396	378	362
9	798	714	653	604	566	532	505	482	462
10	1011	905	826	765	716	674	640	610	585

Artículo C.12.2.3. Caso general

Tabla 4.14
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.3$ c_b (mm) = 40

f_y = 420 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d(mm)	17.6 ℓ_d(mm)	21.1 ℓ_d(mm)	24.6 ℓ_d(mm)	28.1 ℓ_d(mm)	31.7 ℓ_d(mm)	35.2 ℓ_d(mm)	38.7 ℓ_d(mm)	42.2 ℓ_d(mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	402	360	329	305	300	300	300	300	300
4	538	481	440	407	381	359	341	325	311
5	673	602	550	510	477	449	426	406	389
6	965	864	789	731	684	644	611	583	558
7	1629	1458	1332	1234	1154	1087	1031	984	942
8	2133	1909	1743	1615	1511	1422	1350	1287	1233
9	2723	2437	2226	2061	1929	1816	1723	1644	1574
10	3448	3086	2819	2611	2443	2300	2183	2082	1993

$\psi_t = 1.3$ c_b (mm) = 40

f_y = 240 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d(mm)	17.6 ℓ_d(mm)	21.1 ℓ_d(mm)	24.6 ℓ_d(mm)	28.1 ℓ_d(mm)	31.7 ℓ_d(mm)	35.2 ℓ_d(mm)	38.7 ℓ_d(mm)	42.2 ℓ_d(mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	307	300	300	300	300	300	300	300	300
5	385	344	315	300	300	300	300	300	300
6	552	494	451	418	391	368	349	333	319
7	931	834	761	705	660	621	590	562	538
8	1219	1091	996	923	864	813	772	736	705
9	1556	1393	1272	1178	1102	1038	985	939	900
10	1971	1764	1611	1492	1396	1314	1247	1190	1139

Artículo C.12.2.3. Caso general
Artículo C.12.2.4. $\psi_t = 1.3$

Tabla 4.15
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.3$ c_b (mm) = 45

f_y = 420 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d(mm)	17.6 ℓ_d(mm)	21.1 ℓ_d(mm)	24.6 ℓ_d(mm)	28.1 ℓ_d(mm)	31.7 ℓ_d(mm)	35.2 ℓ_d(mm)	38.7 ℓ_d(mm)	42.2 ℓ_d(mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	402	360	329	305	300	300	300	300	300
4	538	481	440	407	381	359	341	325	311
5	673	602	550	510	477	449	426	406	389
6	858	768	701	650	608	572	543	518	496
7	1448	1296	1184	1097	1026	966	917	874	837
8	1896	1697	1550	1435	1343	1264	1200	1144	1096
9	2420	2166	1978	1832	1714	1614	1532	1461	1399
10	3065	2744	2506	2321	2171	2044	1940	1850	1772

$\psi_t = 1.3$ c_b (mm) = 45

f_y = 240 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d(mm)	17.6 ℓ_d(mm)	21.1 ℓ_d(mm)	24.6 ℓ_d(mm)	28.1 ℓ_d(mm)	31.7 ℓ_d(mm)	35.2 ℓ_d(mm)	38.7 ℓ_d(mm)	42.2 ℓ_d(mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	307	300	300	300	300	300	300	300	300
5	385	344	315	300	300	300	300	300	300
6	490	439	401	371	348	327	311	300	300
7	828	741	677	627	587	552	524	500	479
8	1083	970	886	820	768	723	686	654	626
9	1383	1238	1131	1047	980	923	876	835	800
10	1752	1568	1432	1326	1241	1168	1109	1058	1013

Artículo C.12.2.3. Caso general
Artículo C.12.2.4. $\psi_t = 1.3$

Tabla 4.16
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.3$ c_b (mm) = 50
f_y = 420 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	402	360	329	305	300	300	300	300	300
4	538	481	440	407	381	359	341	325	311
5	673	602	550	510	477	449	426	406	389
6	808	724	661	612	573	539	512	488	468
7	1303	1167	1066	987	923	869	825	787	754
8	1706	1527	1395	1292	1209	1138	1080	1030	986
9	2178	1950	1781	1649	1543	1453	1379	1315	1259
10	2759	2469	2255	2089	1954	1840	1746	1665	1595

$\psi_t = 1.3$ c_b (mm) = 50
f_y = 240 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	307	300	300	300	300	300	300	300	300
5	385	344	315	300	300	300	300	300	300
6	462	414	378	350	328	308	300	300	300
7	745	667	609	564	528	497	472	450	431
8	975	873	797	738	691	651	617	589	564
9	1245	1114	1018	943	882	830	788	752	720
10	1577	1411	1289	1194	1117	1052	998	952	912

Artículo C.12.2.3. Caso general
Artículo C.12.2.4. $\psi_t = 1.3$

Tabla 4.17
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.3$ c_b (mm) = 55
f_y = 420 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	402	360	329	305	300	300	300	300	300
4	538	481	440	407	381	359	341	325	311
5	673	602	550	510	477	449	426	406	389
6	808	724	661	612	573	539	512	488	468
7	1185	1061	969	897	840	790	750	715	685
8	1551	1388	1268	1174	1099	1035	982	936	897
9	1980	1772	1619	1499	1403	1321	1253	1195	1145
10	2508	2245	2050	1899	1777	1673	1587	1514	1450

$\psi_t = 1.3$ c_b (mm) = 55
f_y = 240 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	307	300	300	300	300	300	300	300	300
5	385	344	315	300	300	300	300	300	300
6	462	414	378	350	328	308	300	300	300
7	677	606	554	513	480	452	429	409	392
8	887	794	725	671	628	591	561	535	513
9	1132	1013	925	857	802	755	716	683	654
10	1433	1283	1172	1085	1015	956	907	865	829

Artículo C.12.2.3. Caso general
Artículo C.12.2.4. $\psi_t = 1.3$

Tabla 4.18
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.3$ c_b (mm) = 60
f_y = 420 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	402	360	329	305	300	300	300	300	300
4	538	481	440	407	381	359	341	325	311
5	673	602	550	510	477	449	426	406	389
6	808	724	661	612	573	539	512	488	468
7	1174	1051	960	889	832	783	743	709	679
8	1422	1273	1162	1077	1007	948	900	858	822
9	1815	1625	1484	1374	1286	1211	1149	1096	1049
10	2299	2058	1879	1741	1629	1533	1455	1388	1329

$\psi_t = 1.3$ c_b (mm) = 60
f_y = 240 MPa $\psi_e = 1.0$ $K_{tr} = 0$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	307	300	300	300	300	300	300	300	300
5	385	344	315	300	300	300	300	300	300
6	462	414	378	350	328	308	300	300	300
7	671	601	549	508	476	448	425	405	388
8	813	727	664	615	576	542	515	491	470
9	1037	929	848	786	735	692	657	626	600
10	1314	1176	1074	995	931	876	832	793	760

Artículo C.12.2.3. Caso general
Artículo C.12.2.4. $\psi_t = 1.3$

Tabla 4.19
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.0$
f_y = 420 MPa $\psi_e = 1.0$ $(c_b + K_{tr})/d_b = 2.5$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	310	300	300	300	300	300	300	300	300
4	414	370	338	313	300	300	300	300	300
5	518	464	423	392	367	346	328	313	300
6	622	557	509	471	441	415	394	376	360
7	903	809	739	684	640	603	572	546	522
8	1034	925	845	783	732	690	654	624	598
9	1168	1045	955	884	827	779	739	705	675
10	1314	1176	1074	995	931	877	832	793	760

$\psi_t = 1.0$
f_y = 240 MPa $\psi_e = 1.0$ $(c_b + K_{tr})/d_b = 2.5$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	300	300	300	300	300	300	300	300	300
5	300	300	300	300	300	300	300	300	300
6	356	318	300	300	300	300	300	300	300
7	516	462	422	391	366	345	327	312	300
8	591	529	483	447	419	394	374	357	342
9	668	598	546	506	473	445	423	403	386
10	751	672	614	569	532	501	476	454	434

Artículo C.12.2.3. Caso general

Tabla 4.20
Longitud de desarrollo de barras corrugadas a tracción

$\psi_t = 1.3$
$f_y = 420$ MPa $\quad \psi_e = 1.0 \quad (c_b + K_{tr})/d_b = 2.5$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d(mm)	17.6 ℓ_d(mm)	21.1 ℓ_d(mm)	24.6 ℓ_d(mm)	28.1 ℓ_d(mm)	31.7 ℓ_d(mm)	35.2 ℓ_d(mm)	38.7 ℓ_d(mm)	42.2 ℓ_d(mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	402	360	329	305	300	300	300	300	300
4	538	481	440	407	381	359	341	325	311
5	673	602	550	510	477	449	426	406	389
6	808	724	661	612	573	539	512	488	468
7	1174	1051	960	889	832	783	743	709	679
8	1344	1203	1098	1017	952	896	851	811	777
9	1518	1359	1241	1149	1075	1013	961	916	878
10	1708	1529	1397	1293	1210	1140	1081	1031	988

$\psi_t = 1.3$
$f_y = 240$ MPa $\quad \psi_e = 1.0 \quad (c_b + K_{tr})/d_b = 2.5$

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d(mm)	17.6 ℓ_d(mm)	21.1 ℓ_d(mm)	24.6 ℓ_d(mm)	28.1 ℓ_d(mm)	31.7 ℓ_d(mm)	35.2 ℓ_d(mm)	38.7 ℓ_d(mm)	42.2 ℓ_d(mm)
2	300	300	300	300	300	300	300	300	300
3	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4	307	300	300	300	300	300	300	300	300
5	385	344	315	300	300	300	300	300	300
6	462	414	378	350	328	308	300	300	300
7	671	601	549	508	476	448	425	405	388
8	768	687	628	582	544	512	486	464	444
9	868	777	709	657	615	579	549	524	502
10	976	874	798	739	692	651	618	590	565

Artículo C.12.2.3. Caso general
Artículo C.12.2.4. $\psi_t = 1.3$

Longitud de desarrollo de barras corrugadas a compresión

La longitud de desarrollo ℓ_{dc} en mm, para barras corrugadas a compresión, debe calcularse como el producto de la longitud de desarrollo básica ℓ_{dc}, y los factores de modificación aplicables, pero ℓ_{dc} no puede ser menor de 200 mm.

La longitud de desarrollo básica, ℓ_{dc}, es:

$$\ell_{dc} = \frac{0.24 d_b f_y}{\lambda \sqrt{f'_c}} \geq 0.043 d_b f_y$$ (la constante 0.043 tiene unidades de mm^2/N)

La longitud de desarrollo básica, ℓ_{dc}, se puede multiplicar por los coeficientes aplicables para:

a) Refuerzo en exceso

Refuerzo en exceso del que requiere el análisis: $\dfrac{A_s \text{ requerido}}{A_s \text{ suministrado}}$

b) Espirales y estribos - Refuerzo encerrado dentro de refuerzo en espiral de diámetro no menor de N° 2 (1/4") o 6M (6 mm) y cuyo paso no sea mayor de 100 mm o estribos de barra N° 4 (1/2") o 13M (13 mm) que cumplan los requisitos del Reglamento (Artículo C.7.10.5) y espaciados a menos de 100 mm centro a centro: 0.75

A continuación, una tabulación de las longitudes de desarrollo básicas de barras corrugadas a compresión para los aceros f_y = 420 y 240 MPa

Tabla 4.21

Longitud de desarrollo básica para barras corrugadas a compresión

f_y = 420 MPa

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d(mm)	17.6 ℓ_d(mm)	21.1 ℓ_d(mm)	24.6 ℓ_d(mm)	28.1 ℓ_d(mm)	31.7 ℓ_d(mm)	35.2 ℓ_d(mm)	38.7 ℓ_d(mm)	42.2 ℓ_d(mm)
2	200	200	200	200	200	200	200	200	200
3	256	229	209	200	200	200	200	200	200
4	341	306	279	259	242	230	230	230	230
5	427	383	349	324	303	288	288	288	288
6	513	459	420	389	364	345	345	345	345
7	596	534	488	452	423	401	401	401	401
8	682	611	558	517	483	459	459	459	459
9	771	690	630	584	546	519	519	519	519
10	868	777	709	657	615	584	584	584	584
11	962	861	786	728	681	647	647	647	647
14	1155	1034	944	874	818	777	777	777	777
18	1539	1377	1258	1165	1090	1035	1035	1035	1035

f_y = 240 MPa

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d(mm)	17.6 ℓ_d(mm)	21.1 ℓ_d(mm)	24.6 ℓ_d(mm)	28.1 ℓ_d(mm)	31.7 ℓ_d(mm)	35.2 ℓ_d(mm)	38.7 ℓ_d(mm)	42.2 ℓ_d(mm)
2	200	200	200	200	200	200	200	200	200
3	200	200	200	200	200	200	200	200	200
4	200	200	200	200	200	200	200	200	200
5	244	219	200	200	200	200	200	200	200
6	293	263	240	222	208	200	200	200	200
7	341	305	279	258	242	230	230	230	230
8	390	349	319	295	276	263	263	263	263
9	441	395	360	334	312	297	297	297	297
10	496	444	406	376	351	334	334	334	334
11	550	492	449	416	390	370	370	370	370
14	660	591	540	500	468	444	444	444	444
18	879	787	719	666	623	592	592	592	592

Artículo C.12.3.2

Ganchos estándar a tracción

La longitud de desarrollo, ℓ_{dh}, en mm, para barras corrugadas en tracción que terminan en un gancho estándar, debe obtenerse como el producto de la longitud de desarrollo por el factor o factores de modificación aplicables, pero no debe ser menor que el mayor entre 8 d_b y 150 mm.

La longitud de desarrollo ℓ_{dh}, para una barra con gancho, con f_y = 420 MPa, es:

$$\ell_{dh} = \frac{0.24 f_y \psi_e d_b}{\lambda \sqrt{f'_c}}$$

La longitud de desarrollo ℓ_{dh}, debe multiplicarse por el factor o factores apropiados siguientes:

a) Para ganchos de barras No.36 y menores, con recubrimiento lateral (normal al plano del gancho) no menor de 65 mm, y para ganchos de 90° con recubrimiento en la extensión de la barra más allá del gancho no menor de 50 mm: 0.7

b) Para ganchos de 90° de barras No.36 y menores que se encuentran confinados por estribos perpendiculares a la barra que se está desarrollando, espaciados a lo largo de ℓ_{dh} a no más $3d_b$; o bien, rodeado con estribos paralelos a la barra que se está desarrollando y espaciados a no más de $3d_b$ a lo largo de la longitud de desarrollo del extremo del gancho mas el doblez 0.8

c) Para ganchos de 180° de barras No.11 (1-3/8") o 36M (36mm) y menores que se encuentran confinados con estribos perpendiculares a la barra que se está desarrollando, espaciados a no más de $3d_b$ a lo largo de ℓ_{dh} 0.8

d) Cuando no se requiera especificadamente anclaje o longitud de desarrollo para f_y, y se dispone de una cuantía de refuerzo mayor a la requerida por análisis..... $\frac{A_{s\ requerido}}{A_{s\ proporcionado}}$

Para barras que son desarrolladas mediante un gancho estándar en extremos discontinuos de elementos con recubrimiento sobre el gancho de menos de 65 mm en ambos lados y en el borde superior (o inferior), la barra con el gancho se debe confinar con estribos, perpendicular a la barra en desarrollo, espaciados en no más de $3d_b$ a lo largo de ℓ_{dh}. El primer estribo debe confinar la parte doblada del gancho dentro de $2d_b$ del exterior del doblez, donde d_b es el diámetro de la barra con gancho. En este caso, no deben aplicarse los factores (b) y (c).

Finalmente, cabe aclarar que los ganchos no se consideran efectivos en el desarrollo de barras en compresión.

En la figura adjunta, correspondiente a barras con ganchos sometidas a tracción, aparece la denominada longitud de desarrollo total, ℓ_{dh}, la cual se mide desde la sección crítica hasta el punto más distante de la barra, en dirección paralela a su porción recta.

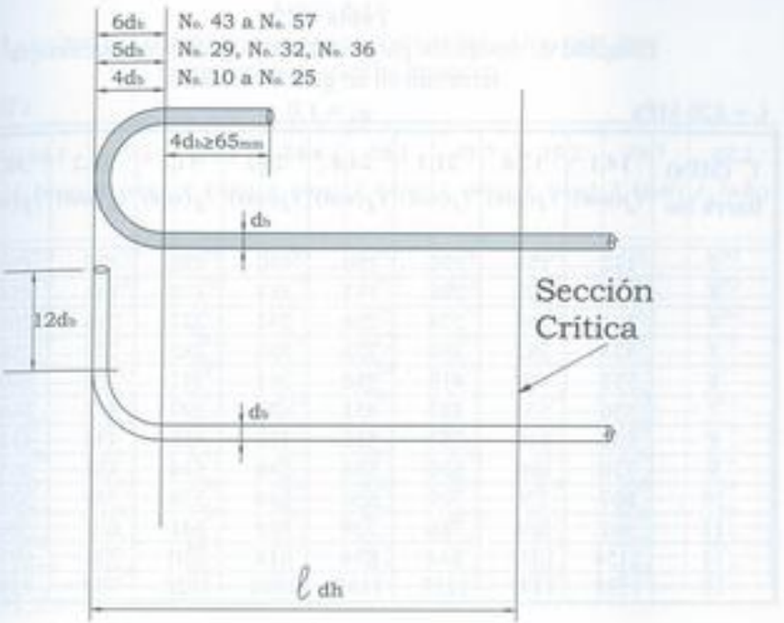


Figura 4.6

A continuación se presenta una tabulación de las longitudes de desarrollo, ℓ_{dh}, en mm, para barras corrugadas en tracción que terminan en un gancho estándar, para f_y = 420 y 240 MPa y su afectación por la multiplicación por algunos de los coeficientes arriba mencionados.

Tabla 4.22
Longitud de desarrollo para barras corrugadas en tracción que terminan en un gancho estándar

f_y = 420 MPa ψ_c = 1.0

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	172	154	150	150	150	150	150	150	150
3	255	228	208	193	181	170	161	154	150
4	341	305	279	258	241	227	216	206	197
5	427	382	349	323	302	285	270	258	247
6	513	459	419	388	363	342	325	309	296
7	596	533	487	451	422	397	377	360	344
8	682	610	557	516	483	455	432	412	394
9	770	690	630	583	546	514	488	465	445
10	867	776	709	656	614	578	549	523	501
11	961	860	786	728	681	641	608	580	556
14	1154	1033	944	874	818	770	731	697	667
18	1538	1377	1257	1165	1090	1026	974	928	889

f_y = 240 MPa

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	150	150	150	150	150	150	150	150	150
3	150	150	150	150	150	150	150	150	150
4	195	174	159	150	150	150	150	150	150
5	244	218	199	185	173	163	154	150	150
6	293	262	240	222	208	195	185	177	169
7	341	305	278	258	241	227	216	206	197
8	390	349	319	295	276	260	247	235	225
9	440	394	360	333	312	294	279	266	254
10	495	443	405	375	351	330	314	299	286
11	549	492	449	416	389	366	348	331	317
14	660	590	539	499	467	440	417	398	381
18	879	787	719	665	623	586	556	531	508

Artículos C.12.5.1 y C.12.5.2

Tabla 4.23
Longitud de desarrollo para barras corrugadas en tracción que terminan en un gancho estándar

f_y = 420 MPa

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	150	150	150	150	150	150	150	150	150
3	179	160	150	150	150	150	150	150	150
4	239	214	195	181	169	159	151	150	150
5	299	267	244	226	212	199	189	180	173
6	359	321	293	272	254	239	227	217	207
7	417	373	341	316	296	278	264	252	241
8	477	427	390	361	338	318	302	288	276
9	539	483	441	408	382	360	341	326	312
10	607	543	496	460	430	405	384	366	351
11	673	602	550	509	477	449	426	406	389
14	808	723	661	612	572	539	511	488	467
18	1077	964	880	815	763	718	681	650	622

Artículo C.12.5.3
Coeficiente usado: 0.7 (literal a)

f_y = 420 MPa

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	150	150	150	150	150	150	150	150	150
3	204	183	167	154	150	150	150	150	150
4	273	244	223	206	193	182	173	165	158
5	341	306	279	259	242	228	216	206	197
6	410	367	335	311	291	274	260	248	237
7	477	427	390	361	338	318	302	288	276
8	545	488	446	413	386	364	345	329	315
9	616	552	504	467	437	411	390	372	356
10	694	621	567	525	491	463	439	419	401
11	769	688	628	582	545	513	487	464	444
14	923	827	755	699	654	616	584	557	534
18	1231	1101	1006	932	872	821	779	743	711

Artículo C.12.5.3
Coeficiente usado: 0.8 (literal b)

Tabla 4.24
Longitud de desarrollo para barras corrugadas en tracción que terminan en un gancho estándar

f_y = 240 MPa

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	150	150	150	150	150	150	150	150	150
3	150	150	150	150	150	150	150	150	150
4	150	150	150	150	150	150	150	150	150
5	171	153	150	150	150	150	150	150	150
6	205	184	168	155	153	153	153	153	153
7	238	213	195	180	178	178	178	178	178
8	273	244	223	206	203	203	203	203	203
9	308	276	252	233	230	230	230	230	230
10	347	310	284	263	258	258	258	258	258
11	384	344	314	291	286	286	286	286	286
14	462	413	377	350	344	344	344	344	344
18	615	551	503	466	458	458	458	458	458

Artículo C.12.5.3
Coeficientes usados: 0.7 (literal a)

f_y = 240 MPa

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	150	150	150	150	150	150	150	150	150
3	150	150	150	150	150	150	150	150	150
4	156	150	150	150	150	150	150	150	150
5	195	175	160	150	150	150	150	150	150
6	234	210	192	177	166	156	153	153	153
7	272	244	223	206	193	182	178	178	178
8	312	279	255	236	221	208	203	203	203
9	352	315	288	267	249	235	230	230	230
10	396	355	324	300	281	264	258	258	258
11	439	393	359	333	311	293	286	286	286
14	528	472	431	399	374	352	344	344	344
18	703	629	575	532	498	469	458	458	458

Artículo C.12.5.3
Coeficiente usados: 0.8 (literal b)

Tabla 4.25
Longitud de desarrollo para barras corrugadas en tracción que terminan en un gancho estándar

f_y = 420 MPa

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	150	150	150	150	150	150	150	150	150
3	150	150	150	150	150	150	150	150	150
4	191	171	156	150	150	150	150	150	150
5	239	214	195	181	169	159	151	150	150
6	287	257	235	217	203	191	182	173	166
7	334	299	273	253	236	223	211	201	193
8	382	342	312	289	270	255	242	230	221
9	431	386	353	327	306	288	273	260	249
10	486	435	397	368	344	324	307	293	281
11	538	482	440	407	381	359	341	325	311
14	646	579	528	489	458	431	409	390	374
18	861	771	704	652	610	574	545	520	498

Artículo C.12.5.3
Coeficientes usados: 0.7*0.8 (literales a y b)

f_y = 240 MPa

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	150	150	150	150	150	150	150	150	150
3	150	150	150	150	150	150	150	150	150
4	150	150	150	150	150	150	150	150	150
5	150	150	150	150	150	150	150	150	150
6	164	153	153	153	153	153	153	153	153
7	191	178	178	178	178	178	178	178	178
8	218	203	203	203	203	203	203	203	203
9	247	230	230	230	230	230	230	230	230
10	277	258	258	258	258	258	258	258	258
11	308	286	286	286	286	286	286	286	286
14	369	344	344	344	344	344	344	344	344
18	492	458	458	458	458	458	458	458	458

Artículo C. 12. 5. 3
Coeficientes usados: 0.7, 0.8 (literales a y b)

A continuación se presenta, con el alcance de sólo un esquema muy general, los posibles puntos de corte para una luz extrema con el apoyo exterior como simple apoyo, con una luz interior soportada en columnas y un voladizo en el otro extremo. Las luces son aproximadamente iguales y la carga en todos los casos es uniforme e igual.

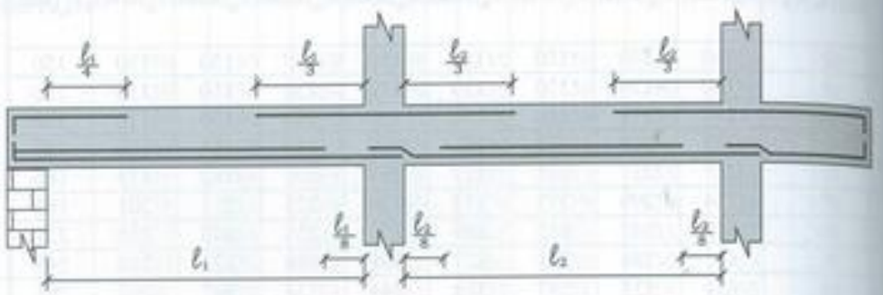


Figura 4.7

Desarrollo de las barras corrugadas con cabeza y ancladas mecánicamente en tracción

La longitud de desarrollo en tracción de las barras corrugadas con cabeza, ℓ_{dt}, debe ser determinada con C.12.6.2. El uso de cabeza para desarrollar las barras corrugadas en tracción debe quedar limitado a condiciones que cumplan con (a) hasta la (f):

a) El f_y de la barra no debe exceder de 420 MPa.

b) El tamaño de la barra no debe ser menor de No. 11 (1-3/8") o 36M (36mm).

c) El concreto debe ser de peso normal.

d) El área de apoyo de la cabeza A_{brg} no debe ser menor a $4A_b$.

e) El recubrimiento libre para la barra no debe ser menor de $2d_b$, y

f) El espaciamiento mínimo de las barras no debe ser menor de $4d_b$.

Para las barras corrugadas con cabeza que cumplen con C.3.5.9, la longitud de desarrollo a tracción ℓ_{dt}, debe ser de $(0.19\psi_e f_y/\sqrt{f'_c})d_b$, donde el valor de f'_c usado para calcular ℓ_{dt} no debe exceder de 40 MPa, y el factor ψ_e debe tomarse como 1.2 para refuerzos recubiertos con epoxico y de 1.0 para otros casos. Donde el refuerzo este en exceso sobre el requerido por el análisis, excepto donde el desarrollo de f_y se requiera especialmente, se permite que ℓ_{dt} sea multiplicado por (A_s requerido)/(A_s entregado). La longitud ℓ_{dt} no debe ser menor del mayor entre $8d_b$ y 150 mm.

Las cabezas no se consideran efectivas en el desarrollo de las barras a compresión.

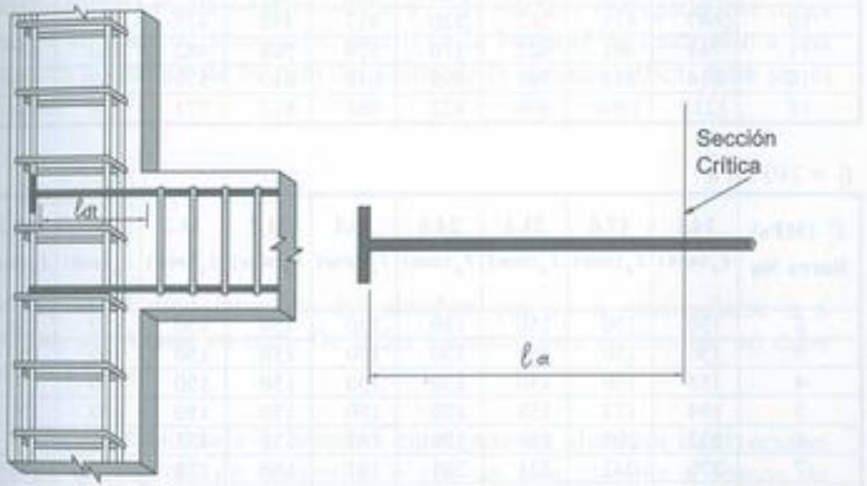


Figura 4.8

Tabla 4.26
Longitud de desarrollo para barras corrugadas con cabeza
Ancladas mecánicamente en tracción

f_y = 420 MPa ψ_e = 1.0

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	150	150	150	150	150	150	150	150	150
3	202	181	166	153	150	150	150	150	150
4	270	242	221	205	192	181	171	163	157
5	338	303	277	256	240	226	214	204	196
6	406	364	332	308	288	271	257	246	235
7	472	423	386	358	335	315	299	285	273
8	540	484	442	409	383	361	342	326	313
9	610	546	499	462	433	407	387	369	353
10	687	615	562	520	487	458	435	415	397
11	761	681	622	576	539	508	482	460	440
14	914	818	748	692	648	610	579	552	529
18	1218	1090	996	922	863	813	771	736	704

f_y = 240 MPa

f'_c (MPa) Barra No	14.1 ℓ_d (mm)	17.6 ℓ_d (mm)	21.1 ℓ_d (mm)	24.6 ℓ_d (mm)	28.1 ℓ_d (mm)	31.7 ℓ_d (mm)	35.2 ℓ_d (mm)	38.7 ℓ_d (mm)	42.2 ℓ_d (mm)
2	150	150	150	150	150	150	150	150	150
3	150	150	150	150	150	150	150	150	150
4	155	150	150	150	150	150	150	150	150
5	194	173	158	150	150	150	150	150	150
6	232	208	190	176	165	155	153	153	153
7	270	242	221	205	191	180	178	178	178
8	309	277	253	234	219	206	204	204	204
9	349	312	285	264	247	233	230	230	230
10	393	352	321	297	278	262	259	259	259
11	435	390	356	330	308	290	287	287	287
14	523	468	427	396	370	349	344	344	344
18	696	623	569	527	493	465	459	459	459

Artículos C.12.6.2

Desarrollo de malla electrosoldada de alambre corrugado

La longitud de desarrollo ℓ_d en mm, para malla electrosoldada de alambre corrugado medida desde la sección crítica hasta el extremo del alambre, debe calcularse como el producto de la longitud de desarrollo para alambre corrugado antes expuesta y el factor o factores de modificación aplicables. Se permite reducir la longitud de desarrollo para el caso de refuerzo en exceso, $A_{s\ requerido}/A_{s\ suministrado}$, pero ℓ_d no debe ser menor de 200 mm excepto al calcular los empalmes por traslapo. En este caso, la longitud mínima de traslapo para empalmes traslapados de malla electrosoldada de alambre corrugado, medida entre los extremos de cada malla, no debe ser menor que $1.3\ell_d$ ni de 200 mm y el traslapo medido entre los alambres transversales extremos de cada malla no debe ser menor de 50 mm.

El coeficiente de malla electrosoldada ψ_w de alambre corrugado que tenga al menos un alambre transversal dentro de la longitud de desarrollo a una separación no menor de 50 mm del punto de la sección crítica, debe ser el mayor de:

$$\left(\frac{f_y - 240}{f_y}\right) \quad \text{o} \quad \left(\frac{5d_b}{s_w}\right)$$

Donde s_w es el espaciamiento del alambre que va a desarrollarse o a empalmar, expresado en mm. De todas maneras, este coeficiente no debe exceder a 1.0.

Para malla electrosoldada de alambre corrugado sin alambres transversales dentro de la longitud de desarrollo, o con un solo alambre a menos de 50 mm de la sección crítica, el anterior coeficiente debe tomarse como 1.0 y la longitud de desarrollo debe ser la que se determine para alambre corrugado.

A continuación y con un alcance estrictamente didáctico, se presenta un ejemplo de diseño de una viga de dos luces y un voladizo como aplicación de los requisitos y especificaciones anteriormente expuestos.

Problema 4.1

La viga de la figura 4.9 tiene una sección de 0.60 x 0.45 m y fue diseñada para concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero de refuerzo para f_y = 420 MPa. En la figura 4.9 se muestran los diagramas de corte y flexión, previamente calculados y el refuerzo colocado.

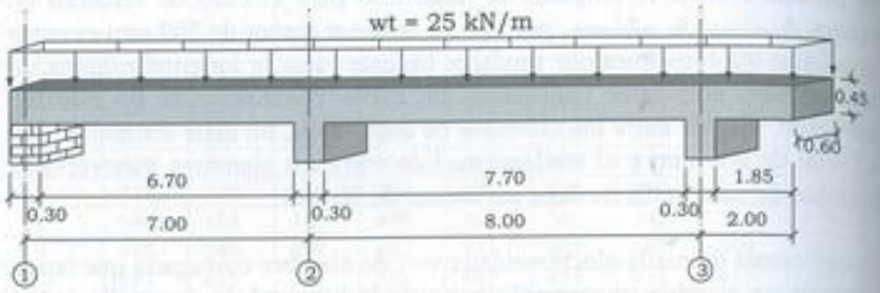


Figura 4.9

Solución

Se presentan los cálculos de las longitudes de desarrollo necesarias para la colocación de los refuerzos previamente obtenidos a partir de los diseños a flexión y cortante. El diseño se efectuó con d = 0.38 m.

1) Refuerzo negativo

Apoyo 2

Momento de diseño: ϕM_n = 280.2 kN·m
Refuerzo requerido: ρ = 0.009653 – A_s = 0.002201 m^2
Refuerzo suministrado: 5 ϕ 7/8" + 1 ϕ 3/4" (0.002219 m^2)

Longitud de anclaje:

Al menos un tercio del refuerzo total a tracción suministrado para momento negativo debe tener una longitud de anclaje más allá del

punto de inflexión, no menor que la altura efectiva del elemento, (0.38 m), 12 d_b (12 x ϕ7/8" = 12*0.0222 = 0.266 m) o 1/16 de la luz libre ((1/16)*6.70 = 0.42 m y (1/16)*7.70 = 0.48 m). Se adopta como longitud de anclaje 0.42 y 0.48 m en cada luz.

Longitud de desarrollo de las barras que se prolongan (ϕ 7/8"):

Según la NSR-10: $$\ell_d = \left(\frac{f_y}{1.1\lambda\sqrt{f'_c}} \frac{\psi_t \psi_e \psi_s}{\left[\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right]} \right) d_b \quad y \quad \left\{ \frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right\} \leq 2.5$$

donde:

ψ_t = coeficiente relacionado con la localización de la barra y es 1.3 para refuerzo superior;

ψ_e = coeficiente relacionado con el tipo de superficie del refuerzo y es 1.0 para refuerzo sin recubrimiento epóxico;

ψ_s = coeficiente de escala relacionado con el diámetro de la barra y es 0.8 para barras No. 6 o menores y 1.0 para barras No. 7 y mayores;

K_{tr} = $40A_{tr}/sn$, en la cual A_{tr} es el área total de refuerzo transversal en forma de estribos, dentro de una distancia s, siendo s el espaciamiento, centro a centro, del refuerzo transversal que existe en la longitud de desarrollo ℓ_d, expresado en mm. A_{tr} = 1*2*71 = 142 mm^2;

s = espaciamiento centro a centro del refuerzo transversal que existe en la longitud de desarrollo ℓ_d. En este problema s = 90 mm;

n = número de barras, en una misma fila o capa, que se desarrollan: 3;

c_b = dimensión del espaciamiento o del recubrimiento del refuerzo = 40 mm

Reemplazando: $\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{40 + \frac{142*40}{90*3}}{22.2} = 2.75 > 2.5$

Longitud de desarrollo:

Para ϕ 7/8":

$$\ell_d = \frac{420}{1.1*\sqrt{21.1}} * \frac{1.3*1.0*1.0}{2.5} * 22.2 = 960 \text{ mm (ídem tabla 4.20)}$$

y por lo tanto para ϕ 3/4":

$$\ell_d = \frac{420}{1.1*\sqrt{21.1}} * \frac{1.3*1.0*0.8}{2.5} * 19.1 = 661 \text{ mm (ídem tabla 4.20)}$$

Apoyo 3:

Momento de diseño: $\phi M_n = 85.0$ kN·m
Refuerzo requerido: $\rho = 0.0033$ (mínima) – $A_s = 0.000752$ m^2
Refuerzo suministrado: 2 ϕ 5/8" + 3 ϕ 1/2" (0.000785 m^2)

Longitud de anclaje:

La mayor entre la altura efectiva (0.38 m), $12d_b$ (12*0.0159 = 0.19 m) y 1/16 de la luz libre (1/16 * 7.70 = 0.48 m). Se adopta 0.48 m.

Longitud de desarrollo:

Para ϕ 5/8":

$$\ell_d = \frac{420}{1.1*\sqrt{21.1}} * \frac{1.3*1.0*0.8}{2.5} * 15.9 = 550 \text{ mm (ídem tabla 4.20)}$$

Para ϕ 1/2":

$$\ell_d = \frac{420}{1.1*\sqrt{21.1}} * \frac{1.3*1.0*0.8}{2.5} * 12.7 = 440 \text{ mm (ídem tabla 4.20)}$$

Apoyo 1:

Se suministra un refuerzo nominal de 2 ϕ5/8" + 3 ϕ1/2" (A_s= 0.000785 m^2), que resulta aproximadamente similar al mínimo requerido (A_s mínimo 0.0033*0.60*0.38= 0.000752 m^2) y de diámetros en concordancia con los colocados en el resto de la viga.

2) Refuerzo positivo

Luz 1 – 2:

Momento de diseño: $\phi M_n = 139.1$ kN·m
Refuerzo requerido: $\rho = 0.004487$ – $A_s = 0.001023$m^2
Refuerzo suministrado: 5 ϕ 1/2" + 2 ϕ 5/8" (0.001043 m^2)

En los apoyos:

Al menos 1/3 del refuerzo para momento positivo en elementos simplemente apoyados y 1/4 del refuerzo positivo en elementos continuos, debe extenderse a lo largo de la misma cara del elemento dentro del apoyo. En vigas, tal refuerzo debe extenderse dentro del apoyo al menos 0.15 m. En vigas que hacen parte del sistema de

resistencia sísmica se deben cumplir los requisitos del Capítulo C.21 del Reglamento Colombiano.

En el ejemplo se entra y extiende en el apoyo (1): 2 ϕ5/8" + 3 ϕ1/2" y en el apoyo (2): 2 ϕ5/8" + 2 ϕ1/2". En el apoyo (1) el refuerzo termina después del centro del mismo con un gancho estándar en su extremo, por tal razón hay necesidad de revisar la longitud de desarrollo para barras corrugadas a tracción.

Luz 2 – 3:

Momento de diseño: $\phi M_n = 164.4$ kN·m
Refuerzo requerido: $\rho = 0.005360$ – $A_S = 0.001222$ m^2
Refuerzo suministrado: 5 ϕ1/2" + 3 ϕ3/8" (0.001242 m^2)

En los apoyos:

En el ejemplo se entra y extiende en los apoyos (2) y (3): 2 ϕ5/8" + 2 ϕ1/2" en longitudes mayores de 0.15 m. Por otra parte, para las barras que se extienden más allá del punto de inflexión hacia el apoyo por una longitud no mayor de la altura efectiva de la viga (d = 0.38 m) o 12 veces el diámetro de la barra d_b (12*0.0159 = 0.19 m), se debe cumplir el requisito que:

$$\ell_d \le \frac{M_n}{V_u} + \ell_a$$

donde:

M_n = resistencia nominal a la flexión del refuerzo 2 ϕ3/8" + 2 ϕ1/2"
M_n = 101.08 kN·m;
V_u= fuerza cortante mayorada en la sección = 118.2 kN;
ℓ_a = longitud de anclaje adicional en el punto de inflexión = 0.38 m

$$\therefore \frac{M_n}{V_u} + \ell_a = \frac{101.08}{118.2} + 0.38 = 1.24 \text{ m}$$

Por otra parte:

$$\ell_d = \frac{420}{1.1*\sqrt{21.1}} * \frac{1.0*1.0*0.8}{2.5} * 15.9 = 423 \text{ mm (ídem tabla 4.19)}$$

cumpliéndose el requisito mencionado.

A continuación, la figura 4.10 que contiene los diagramas y refuerzos anunciados.

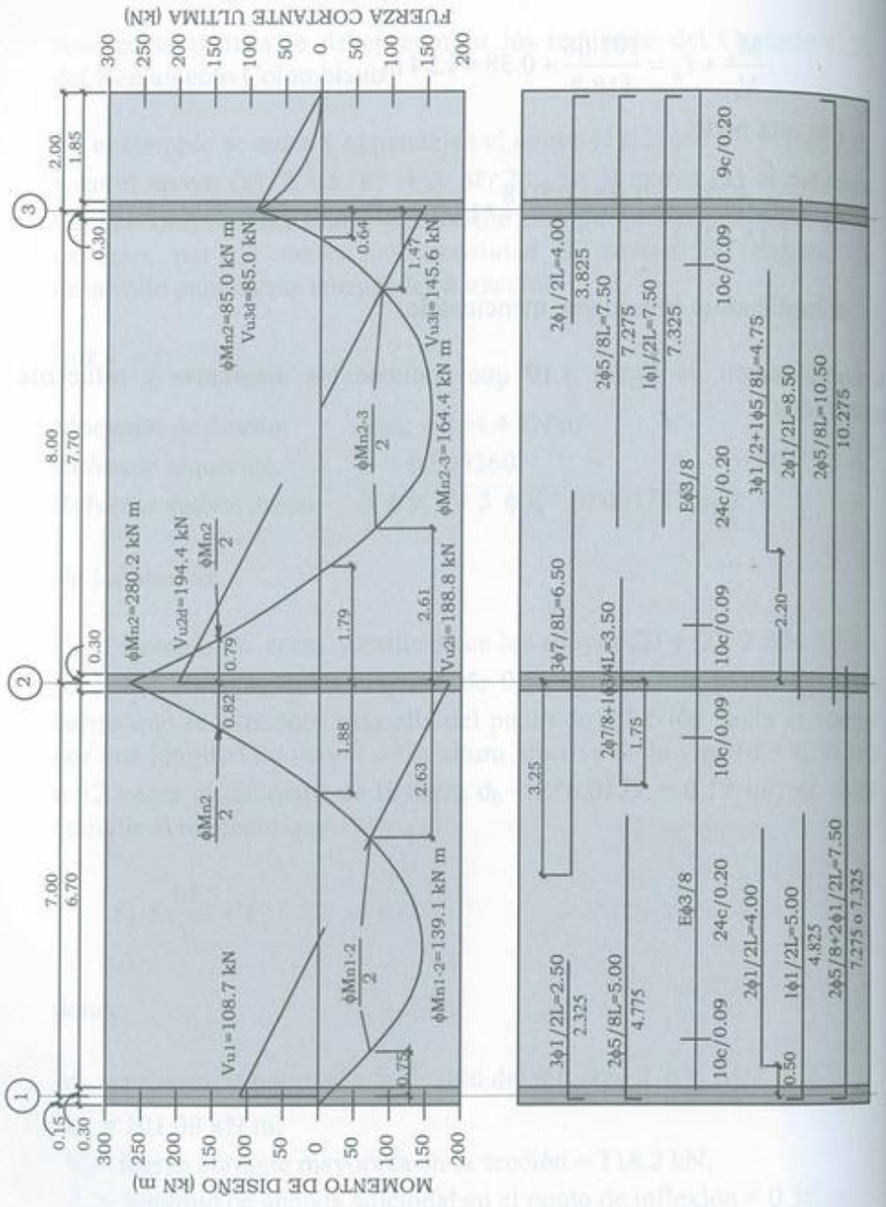


Figura 4.10

Capítulo 5

SISTEMA DE LOSAS ARMADAS EN UNA DIRECCION

SISTEMA DE LOSAS ARMADAS EN UNA DIRECION

En este capítulo se tratarán las losas armadas en una dirección en sus dos tipos, macizas y aligeradas, apoyadas en vigas o en muros.

Se armarán losas en una dirección en el caso evidente en que sólo existan apoyos en esa dirección o cuando el grado de rectangularidad de la losa es tal que la relación de sus luces sea de 0.5 o menos, en cuyo caso la mayor parte de la carga será llevada por flexión a los apoyos en el sentido de la luz corta que por consiguiente será la de diseño. Este concepto de repartición de la carga se estudia con más detalle en el Capítulo 7, Sistemas de losas armadas en dos direcciones.

La utilización de los dos tipos, maciza o aligerada, es en buena parte función de la luz, siendo maciza la que corresponde a luces cortas. A continuación se presentan ejemplos de diseño de una y otra, en los cuales se enuncian las especificaciones aplicables en cada caso.

Losas macizas

Problema 5.1

Diseñar una losa maciza de dimensiones en planta 4.00 x 8.00 m., apoyada sobre muros de ladrillo tolete y apta para soportar una sobrecarga o carga de servicio de 1.8 kN/m^2, si se usarán particiones sobre la losa en ladrillo bloque hueco de arcilla para una carga repartida de 3 kN/m^2 y se construirá en concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero con un límite de fluencia de 240 MPa.

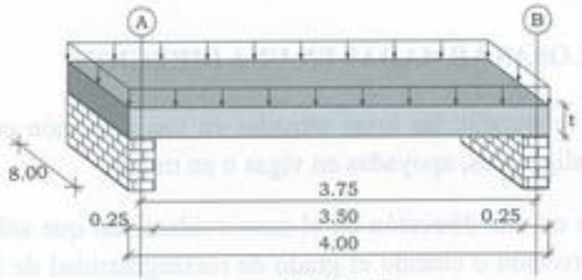


Figura 5.1

Se debe obtener el espesor "t" a fin de calcular las cargas de diseño de la losa, usualmente por metro cuadrado. Para este efecto es preciso referirse a la recomendación del Reglamento NSR-10, el cual especifica en el cuerpo del Reglamento y en su comentario los siguientes espesores mínimos para losas macizas no preesforzadas que trabajen en una dirección, a menos que un cálculo cuidadoso de las deflexiones permita adoptar espesores menores.

$t = \frac{\ell}{14}$ para muros divisorios y particiones frágiles y

$t = \frac{\ell}{20}$ para muros divisorios y particiones no susceptibles de dañarse ante deflexiones grandes

Estos espesores se usarán para elementos cuyo refuerzo tenga un límite de fluencia de 420 MPa; para otros tipos de acero de refuerzo los valores anteriores se deben multiplicar por

$$\left(0.4 + \frac{f_y}{700}\right).$$

En este caso, siendo ℓ la luz de la losa centro a centro de apoyos, resulta:

$$t = \frac{3.75}{14} * \left(0.4 + \frac{240}{700}\right) = 0.198 \text{ m} \sim 0.20 \text{ m} \quad \text{y}$$

$$t = \frac{3.75}{20} * \left(0.4 + \frac{240}{700}\right) = 0.139 \text{ m} \sim 0.14 \text{ m}$$

Sin embargo, el espesor final adoptado dependerá de consideraciones ligadas a la sobrecarga, recubrimiento del refuerzo como protección del medio ambiente, seguridad y economía, y a un espesor mínimo, en todos los casos, de 0.10 m. Para el ejemplo que se expone se adopta t = 0.15 m. Por lo tanto:

Cargas:

Peso propio de la losa:	0.15*1.00*1.00*24	=	3.60 kN/m^2
Piso en mortero afinado acabado en vinilo:	0.03*1.00*1.00*22	=	0.66 kN/m^2
Pañete cielo raso:	0.02*1.00*1.00*22	=	0.44 kN/m^2
Carga por particiones:		=	3.00 kN/m^2
Subtotal (carga muerta):		=	7.70 kN/m^2
Carga viva:		=	1.80 kN/m^2
Total		=	9.50 kN/m^2

El diseño de estas losas se efectúa por metro de ancho; por lo tanto la carga de diseño será 9.50 kN/m.

Por tratarse de una losa apoyada directamente sobre muros de ladrillo cerámico no integrales con la misma, la luz de cálculo para flexión será la luz entre ejes; si se construye integral con la losa una viga de borde para su apoyo (Figura 5.2.a) o si el muro se continúa hacia arriba sobre ella (Figura 5.2.b), se tendrá una restricción del libre giro de la losa que significa un momento negativo en el apoyo y una disminución del momento positivo en la luz, justificándose el diseño para un momento positivo inferior al

correspondiente a la losa simplemente apoyada o el empleo en su determinación de la luz libre, todo a criterio del diseñador.

Figura 5.2.a

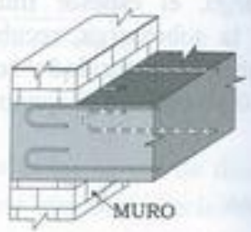


Figura 5.2.b

Como solución a la tracción debida a este momento negativo, se acostumbra doblar la mitad de los hierros correspondientes al refuerzo para momento positivo, donde ya no se necesitan para este efecto (momento flector positivo igual o menor a la mitad del máximo de diseño) y prolongarlos en la parte superior hasta el apoyo, de manera que la parte recta superior no sea inferior a 0.30 m.

Por lo tanto:

$$\frac{x^2}{\frac{M}{2}} = \frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{M} \quad \therefore \quad x = \frac{\ell}{\sqrt{8}} \sim 0.35\,\ell$$

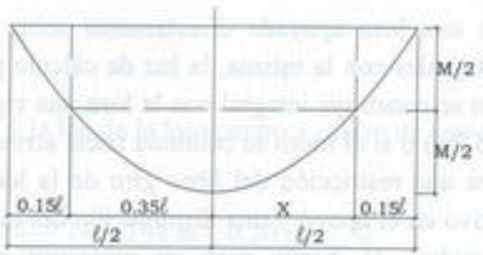


Figura 5.3

Luego, se puede doblar el refuerzo a 0.15ℓ del eje de apoyo o aproximadamente a $\frac{1}{7}$ de la luz libre.

Armadura transversal

De acuerdo con el Reglamento colombiano, en losas macizas reforzadas en una dirección debe colocarse un refuerzo secundario, para efectos de retraccion y temperatura, en dirección perpendicular al refuerzo principal. La relación de área de refuerzo a área bruta de concreto debe tener, como mínimo, los siguientes valores, los cuales son aplicables cuando la losa puede expandirse o contraerse libremente, o cuando se admite que se presente fisuración sin ningún control, o cuando el control de fisuración es innecesario:

Para barras corrugadas con resistencia a la fluencia f_y menor o igual a 350 MPa.....0.0020

Para barras corrugadas con resistencia a la fluencia f_y igual a 420 MPa o refuerzo electrosoldado de alambre.....0.0018

Para refuerzo con resistencia a la f_y fluencia mayor de 420 MPa, correspondiente a una deformación unitaria de fluencia de 0.35% pero no menor de 0.0014..... $\frac{0.0018 * 420}{f_y}$

Este refuerzo de retracción y temperatura, debe tener una separación máxima no mayor de 5 veces el espesor de la losa o 500 mm, la que sea menor.

Finalmente, también de acuerdo al Reglamento colombiano, el recubrimiento del refuerzo para concreto no expuesto a la intemperie, ni en contacto con el suelo, en losas será de 20 mm, lo cual permite utilizar para el ejemplo propuesto $d = 0.15 - 0.03 = 0.12$ m.

Hechas las consideraciones anteriores, se procede al diseño, utilizando un coeficiente de carga que el diseñador considere apropiado:

Usando U = 1.4 D + 1.6 L, se obtiene w_u = 1.4*7.70 + 1.6*1.80 = 13.66kN/m^2

$$\therefore \quad U = \frac{13.66}{9.50} = 1.44\ (D+L), \qquad f\,de\,S = \frac{1.44}{0.9} = 1.60,$$

	(A)		(B)
$M = \frac{w\ell^2}{8}$	$\frac{9.50*3.75^2}{8} = 16.70$ kN·m		
$\phi M_n = 1.44M$	24.05kN·m		
ρ	0.008182		
A_s	0.000982 m^2/m		
Armadura:			
ϕsuperior	ϕ ½" c/0.26		ϕ ½" c/0.26
ϕinferior	ϕ ½" c/0.26	ϕ ½" c/0.13	ϕ ½" c/0.26

Transversal $A_s = 0.0020*1.00*0.15 = 0.0003$ m^2/m – ϕ ⅜" c/0.235

Notas

a) Según el Reglamento, el área mínima del refuerzo en la dirección de la luz debe ser la que se requiera para retracción y variación de temperatura; sin embargo, el espaciamiento máximo de las barras de refuerzo no ha de exceder del menor de tres veces el espesor de la losa ni de 450mm. Cuando se trate de refuerzo realmente colocado para efectos de retracción y temperatura, la separación de las barras de refuerzo no debe exceder de cinco veces el espesor de la losa, manteniendo también el máximo de 450 mm.

b) La armadura de las losas macizas generalmente se indica por el diámetro de la barra y su separación obtenidos a partir del área de refuerzo requerido por metro de ancho, así:

$s = 1.0\frac{A_b}{A_s}$ (área de la barra/área de refuerzo requerido por metro de ancho).

Diseño a cortante:

	(A)	(B)
Reacciones	$R_A = \frac{9.50*3.75}{2} = 17.81$ kN	$R_B = 17.81$ kN
V_d (kN)	15.48	15.48
$V_u = 1.44V_d$	22.29	22.29
ϕV_c =	70.23	70.23
	$V_u < \phi V_c$	$V_u < \phi V_c$

El resultado obtenido para la fuerza de corte es normal en estas losas a las cuales, por lo general, no se les coloca refuerzo por este concepto. Estas losas son excepción al requisito del Reglamento de colocación de un refuerzo mínimo de cortante donde la fuerza cortante mayorada V_u sea mayor que la mitad de la resistencia suministrada por el concreto.

En la Figura 5.4 se muestra el refuerzo para esta losa.

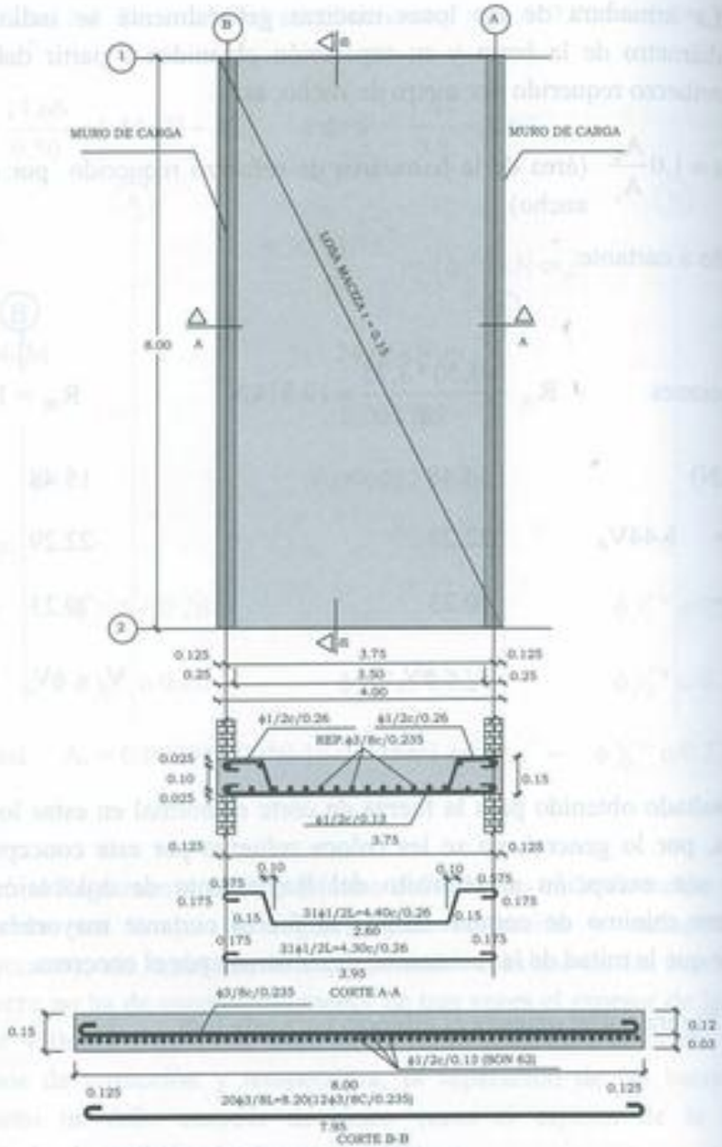


Figura 5.4

Escaleras

Uno de los elementos estructurales más frecuentes son las escaleras del tipo de losa simplemente apoyada, las cuales se calculan como la losa maciza anterior con una luz de cálculo correspondiente a la proyección horizontal entre apoyos. A continuación un ejemplo de este tipo de escalera.

Problema 5.2

Diseñar una escalera de dos tramos inclinados y un descanso del tipo de losa maciza inferior simplemente apoyada, típica de un edificio de altura de piso a piso terminado de 3.50 m (altura libre entre pisos de 2.90 m, espesor de losas de entrepiso de 0.50 m y holgura para acabados de 0.10 m) y dimensiones en planta tal como aparece en la figura 5.9 si se utiliza concreto de f'_c = 21.1 MPa, acero para f_s = 170 MPa y n=9.3.

Antes de proceder al diseño, cabe comentar que las dimensiones más usuales para las alturas o contrahuellas y las huellas o pasos empleados por nuestros arquitectos en la actualidad son 0.175m en función de la comodidad de la escalera y un mínimo de 0.28m según el Reglamento colombiano respectivamente. Por otra parte, el diseño de las escaleras de este tipo se basa en la consideración como luz de cálculo la que corresponde a la proyección horizontal entre apoyos.

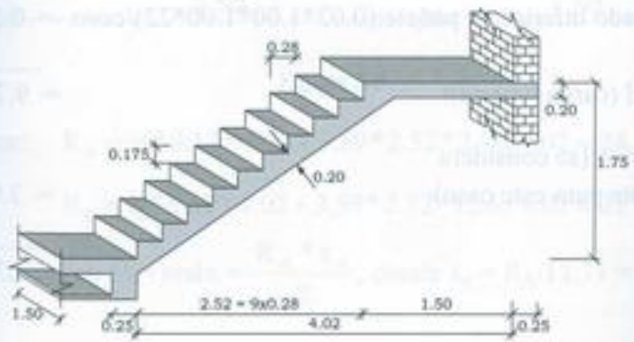


Figura 5.5

Se utilizan, en este ejemplo, las dimensiones usuales antes enunciadas; respecto del espesor de la losa maciza inferior se predimensiona:

$$t = \frac{4.02}{20} = 0.20\ m$$

En cuanto a la pendiente:

$$\tan\alpha = \frac{0.175}{0.28} = 0.625 \quad \therefore \alpha \sim 32°$$

Con estas dimensiones y pendiente se analizan las cargas en kN por m^2 de área en proyección horizontal:

Tramo inclinado:

Peso propio losa:	$(0.20*1.00*1.00*24)/\cos\alpha$	$= 5.66 kN/m^2$
De peldaños:	$(0.175*0.28/2*1.00*24)/0.28$	$= 2.10 kN/m^2$
De acabado en granito para los peldaños (0.28 horizontal o en proyección y 0.175 vertical o adicional):	$0.04*(0.175+0.28)/0.28*1.00*22$	$= 1.43 kN/m^2$
De afinado inferior en pañete:	$(0.02*1.00*1.00*22)/\cos\alpha$	$= 0.52 kN/m^2$
Subtotal (carga muerta):		$= 9.71 kN/m^2$
Carga viva (se considera suficiente para este caso):		$= 3.00 kN/m^2$
Total:		$= 2.71 kN/m^2$

Descanso:

Peso propio losa:	$0.20*1.00*1.00*24$	$= 4.80 kN/m^2$
De acabado superior en granito:	$0.04*1.00*1.00*22$	$= 0.88 kN/m^2$
De afinado inferior en pañete:	$0.02*1.00*1.00*22$	$= 0.44 kN/m^2$
Subtotal (carga muerta):		$= 6.12 kN/m^2$
Carga viva (se considera también, suficiente para este caso):		$= 3.00 kN/m^2$
Total:		$= 9.12 kN/m^2$

El diagrama de cargas en proyección horizontal por metro de ancho será:

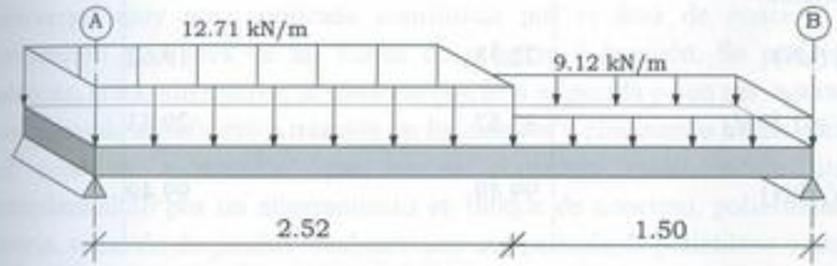


Figura 5.6

Reacciones: $R_A = \frac{1}{2}*9.12*4.02 + 3.59*2.52*2.76/4.02 = 24.54\ kN$

$R_B = \frac{1}{2}*9.12*4.02 + 3.59*2.52*1.26/4.02 = 21.17\ kN$

Momento máximo $M(+)máx = \frac{R_A * x_o}{2}$, donde $x_o = R_A/12.71 = 1.93\ m$

Por lo tanto M(+) máx = 23.68kN·m/m

Diseño: $\rho = 0.005294 - A_s = 0.000900\ m^2/m \sim 900\ mm^2/m$

Armadura transversal: para acero corrugado de alta resistencia se obtiene:

$A_s = 0.0018*1.00*0.20 = 0.00036\ m^2/m \sim 360\ mm^2/m$

Resumen de la armadura:

	Ⓐ			Ⓑ	
ϕsuperior	ϕ½"	c/0.28		ϕ½"	c/0.28
ϕinferior	ϕ½"	c/0.28	ϕ½" c/0.14	ϕ½"	c/0.28
ϕtransversal			ϕ⅜" c/0.19		
Cortante:					
V_d (kN)		22.38		19.62	
$V_u = 1.5*V_d$		33.57		29.43	
ϕV_c (kN)		99.49		99.49	

Nota

El tramo de escalera del descanso al siguiente piso tiene la misma luz en proyección horizontal y por lo tanto el mismo diseño y armadura.

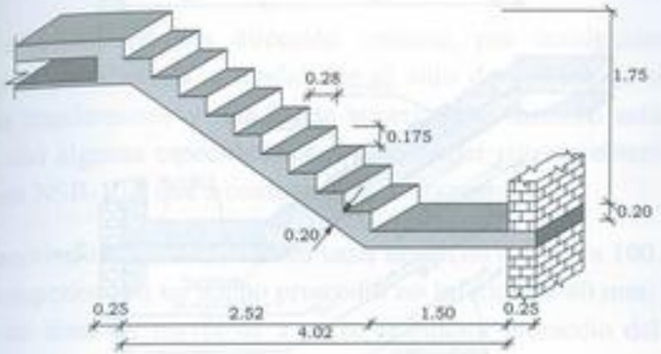


Figura 5.7

En la figura 5.9 se ve el detalle del refuerzo de esta escalera.

Losas Nervadas

Al aumentar la luz, las losas macizas resultan de grandes espesores, con un considerable aumento en el peso del edificio, además de una sección transversal muy poco utilizada constituida por el área de concreto a compresión y el área de las barras de refuerzo a tracción. Se presenta entonces, como alternativa, la solución con losa aligerada o con nervaduras, concentrando el refuerzo a tracción en los nervios y eliminando buena parte del concreto a tracción que no se considere estáticamente útil, reemplazándolo por un aligeramiento en bloque de concreto, poliestireno, escoria, canastón de guadua recubierto con una película de polietileno o lona o simplemente utilizando una formaleta removible que deja los nervios o las viguetas a la vista.

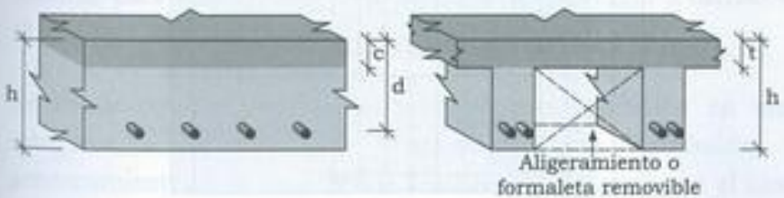


Figura 5.8

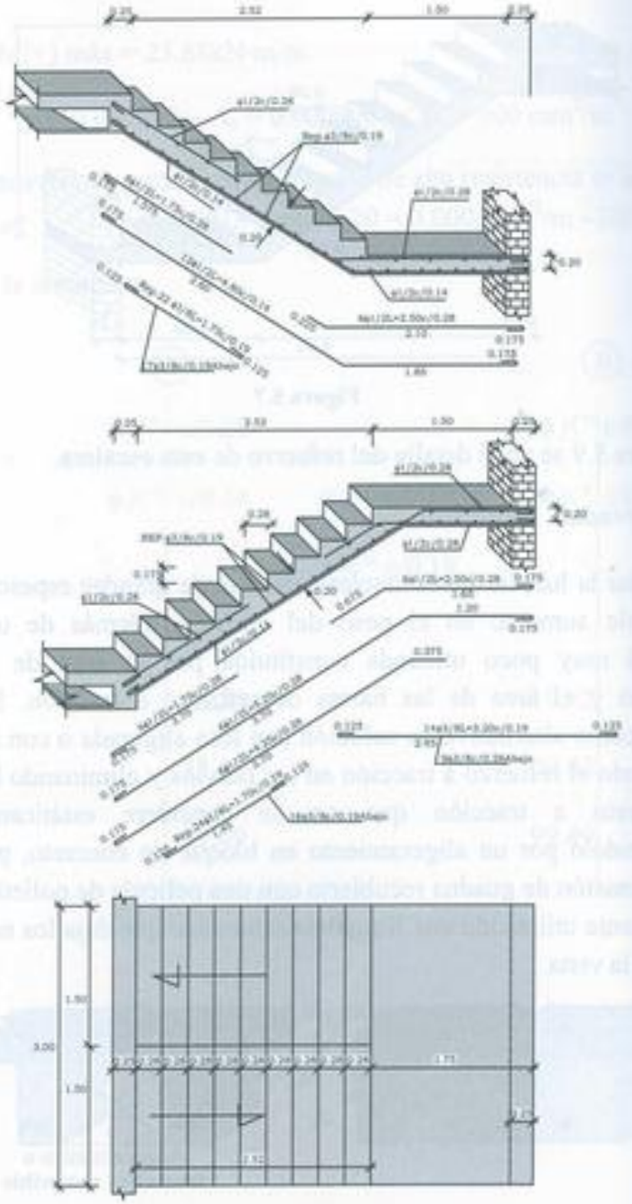


Figura 5.9

La losa aligerada en una dirección consiste, por consiguiente, en la combinación prefabricada o fundida en el sitio de nervaduras o viguetas espaciadas regularmente y una loseta superior que también actúa en una dirección con algunas especificaciones propias del sistema obtenidas en el Reglamento NSR-10 y que a continuación se comentan:

- Los nervios o viguetas no deben tener un ancho inferior a 100 mm en la parte superior con un ancho promedio no inferior de 80 mm. Su altura libre no debe ser mayor de 5 veces el espesor promedio del nervio o vigueta.

- La loseta superior, para el caso de fundida en el sitio, debe tener más de 45 mm de espesor, pero no menos de $1/20$ de la distancia libre entre nervios y debe estar provista como mínimo del refuerzo de repartición y temperatura correspondiente, colocado en ángulo recto con las viguetas. En el caso en que se utilicen bloques de aligeramiento permanentes de concreto o de arcilla cocida o losetas prefabricadas, la loseta fundida en el sitio puede tener 40 mm. En forma muy general se recomienda para esta loseta un espesor mínimo de 50 mm.

- La separación máxima entre nervios o viguetas medida centro a centro, no debe ser mayor de 2.5 veces el espesor total de la losa sin exceder de 1.20 m.

- El recubrimiento mínimo del refuerzo será de 20 mm y la distancia libre entre barras paralelas será de 25 mm, por lo que la armadura máxima para una vigueta de 0.10 m de ancho es de 2 barras No. 5 ($2\ \phi 5/8"$).

- Se deben colocar viguetas transversales de repartición en sentido ortogonal a las de diseño, convenientemente distribuidas para arriostramiento de la losa en este sentido, especialmente en el caso de aligeramiento flexible, con una separación libre máxima de 10 veces el

espesor total de la losa, sin exceder de 4m. En el caso de utilizar canastón de guadua se sugiere un espaciamiento de estas viguetas, llamadas también riostras, no mayor de 3m, facilitándose así la prefabricación y manejo de este material.

Finalmente, en cuanto a su análisis y diseño para cargas verticales, dice el Reglamento NSR-10 que las losas que trabajan en una dirección, macizas o aligeradas, construidas monolíticamente con sus apoyos, pueden analizarse y diseñarse como losas continuas sobre apoyos simples con luces iguales a las luces entre los ejes de las vigas o con luces iguales a las luces libres si es que se puede no tener en cuenta el ancho de las vigas y su efecto torsional. Agrega también que en lugar de este análisis detallado se puede utilizar un análisis aproximado con los siguientes momentos y cortantes, siempre y cuando se cumplan los siguientes requisitos:

a. Haya dos o más luces;
b. Las luces sean aproximadamente iguales y la diferencia máxima entre dos luces adyacentes no sea más del 20% de la menor;
c. Las cargas sean uniformemente repartidas;
d. La carga viva unitaria no exceda de tres veces la carga muerta unitaria; y
e. Los elementos sean prismáticos.

Momentos positivos

Luces exteriores:

- Apoyo exterior no restringido:..... $w_u \frac{\ell_n^2}{11}$
- Apoyo exterior construido integralmente con el elemento de soporte:..... $w_u \frac{\ell_n^2}{14}$
- Luces interiores:..... $w_u \frac{\ell_n^2}{16}$

Momentos negativos

Cara exterior del primer apoyo interior:

- Dos luces: ..... $w_u \frac{\ell_n^2}{9}$
- Más de dos luces: ..... $w_u \frac{\ell_n^2}{10}$
- Apoyos interiores: ..... $w_u \frac{\ell_n^2}{11}$
- Apoyos interiores de losas con luces menores de 3.50 m o elementos que llegan a apoyos muy rígidos:..... $w_u \frac{\ell_n^2}{12}$

Apoyo exterior de elementos construidos integralmente con sus apoyos:

- Apoyados sobre una viga: ..... $w_u \frac{\ell_n^2}{24}$
- Apoyados sobre una columna:..... $w_u \frac{\ell_n^2}{16}$

Cortante

- Luces finales cara del primer apoyo:..... $1.15 * w_u \frac{\ell_n}{2}$
- Otros apoyos:..... $w_u \frac{\ell_n}{2}$

donde:

ℓ_n = longitud de la luz libre en la dirección en la cual se determinan los momentos, medida cara a cara de los apoyos.

La luz que se utiliza en el cálculo de los momentos negativos debe ser el promedio de las luces adyacentes.

Es opinión del autor que la utilización de los anteriores momentos y cortantes aproximados en los elementos estructurales que cumplan las condiciones propuestas, corresponde a un criterio de comparación y límite con respecto a un diseño por un método más exacto de análisis. A continuación, un modelo de análisis y diseño de losa nervada para cargas verticales.

Problema 5.3

Predimensionar y diseñar la losa nervada de tres luces de 8.00, 8.50 y 8.00 metros respectivamente, espesor de 500 mm y aligerada con canastones de poliestireno (icopor) removible para una separación aproximada de nervios de 1.20 m, que se construirá como adición a un edificio de oficinas, según el detalle adjunto en la figura 5.11. La losa debe soportar un piso de vinilo y particiones fijas de mamposteria para una carga valorada, según proyecto, en 2.0 kN/m^2. Los materiales son concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero con f_y = 420 MPa en todos los diámetros.

Solución

A partir de la distribución estructural prevista según el detalle anexo, se calcularon aproximadamente las cargas verticales y se analizó y diseñó utilizando los momentos y cortantes aproximados del Reglamento. A continuación, se usó un método más exacto de análisis manteniendo las mismas cargas aproximadas de la predimensión, a fin de comparar resultados.

Cargas:

Peso propio loseta de recubrimiento:	0.06*1.00*1.00*24	= 1.44kN/m^2
Viguetas:	(0.12*0.44*1.00*24)/1.20	= 1.06kN/m^2
Piso y alistado:	0.03*1.00*1.00*22	= 0.66kN/m^2
Peso propio del cielo raso descolgado		= 0.30kN/m^2
Particiones fijas de mampostería:		= 2.00kN/m^2
Subtotal (carga muerta):		= 5.46kN/m^2

Carga viva:	= 2.00kN/m^2
Total:	= 7.46kN/m^2

Carga por vigueta = 7.46*1.20 = 8.95kN/m

Los momentos y cortantes aproximados son:

$$M_1 = M_4 = w\frac{\ell_n^2}{24} = 8.95*\frac{7.575^2}{24} = 21.40\,\text{kN·m}$$

$$M_2 = M_3 = w\frac{\ell_n^2}{10} = 8.95\frac{7.79^2}{10} = 54.31\,\text{kN·m}$$

$$M_{luz\,1\text{-}2} = M_{luz\,3\text{-}4} = w\frac{\ell_n^2}{14} = 8.95*\frac{7.575^2}{14} = 36.68\,\text{kN·m}$$

$$M_{luz\,2\text{-}3} = w\frac{\ell_n^2}{16} = 8.95*\frac{8.00^2}{16} = 35.80\,\text{kN·m}$$

$$V_{1\text{-}d} = V_{4\text{-}i} = w*\frac{\ell_n}{2} = 8.95*\frac{7.575}{2} = 33.90\,\text{kN}$$

$$V_{2\text{-}i} = V_{3\text{-}d} = 1.15*w*\frac{\ell_n}{2} = 1.15*8.95*\frac{7.575}{2} = 38.98\,\text{kN}$$

$$V_{2\text{-}d} = V_{3\text{-}i} = w*\frac{\ell_n}{2} = 8.95*\frac{8.00}{2} = 35.80\,\text{kN}$$

Asumiendo como necesario el coeficiente de carga de 1.4 para carga muerta y 1.6 para carga viva

w_u= 1.4*5.46 + 1.6*2.00 = 10.84

: U = 10.84 / 7.46 = 1.45

F de S a la flexión = 1.45 / 0.90 = 1.61

F de S al cortante = 1.45 / 0.75 = 1.93

	①		②		③		④
M (kN·m) =	21.40	36.68	54.31	35.80	54.31	36.68	21.40
ϕM_n=1.45M	31.03	53.19	78.75	51.91	78.75	53.19	31.03
ρ =	0.003219	0.005691	0.008763	0.005545	0.008763	0.005691	0.003219
A_s (mm^2) =	182	321	494	313	494	321	182
ϕ superior	1φ½" + 1φ⅜"		2φ¾"		2φ¾"		1φ½" + 1φ⅜"
ϕ inferior:	1φ⅝"	1φ½" + 1φ⅝"	(1+1) φ⅝"	1φ½" + 1φ⅝"	(1+1) φ⅝"	1φ½" + 1φ⅝"	1φ⅝"
V (kN) =	33.90	38.98	35.80	35.80	38.98		33.90
V_d =	29.69	34.77	31.59	31.59	34.77		29.69
$V_u = 1.45V_d$	43.05	50.42	45.81	45.81	50.42		43.05
ϕV_c =	33.01	33.01	33.01	33.01	33.01		33.01
ϕV_s =	10.04	17.41	12.80	12.80	17.41		10.04
S (m) =	1.24	1.62	1.46	1.46	1.62		1.24
Estribos:	7 #2 c/0.23	9 #2 c/0.23	8 #2 c/0.23	8 #2 c/0.23	9#2 c/0.23		7 #2 c/0.23

Donde exista refuerzo superior deben colocarse estribos ϕ¼" c/0.30 por construcción.

La loseta superior o de recubrimiento se armará perpendicularmente a las viguetas siguiendo la especificación de retracción de fraguado y temperatura, que para este tipo de refuerzo de f_y = 420 MPa resulta de 0.0018*1*0.06 = 0.000108 m^2/m, lo cual significa ϕ¼" c/0.25 m ya que la separación máxima no debe ser mayor de 5 veces el espesor de la loseta (0.25 m) ó 0.45 m. Para este caso puede ser de utilidad el empleo de una malla electrosoldada con A_s = 0.000108 m^2/m ó la referencia comercial aproximada por exceso.

Notas

1. Se destaca que en las luces se tienen viguetas "T" de 1.20x0.50 m -estructuralmente de 1.08x0.50 m - y en los apoyos viguetas rectangulares de 0.12 x 0.50. Por ejemplo, al diseñar la luz entre apoyos 1 y 2 como "T", resulta:

$$\phi M_n = \phi * \rho f_y * \left(1 - 0.59\rho \frac{f_y}{f'_c}\right) * bd^2$$

$$\therefore 53.19 = 0.9 * \rho * 420000 * \left(1 - 0.59 * \rho * \frac{420}{21.1}\right) * 1.08 * 0.47^2$$

$$\therefore \rho = 0.000594 - A_s = 0.000594 * 1.08 * 0.47$$

$$A_s = 0.000302\ m^2 \sim 302\ mm^2$$

Este refuerzo es el requerido por análisis sin comparar con el mínimo.

Para esta cuantía:

$$a = \frac{\rho f_y}{085 f'_c} d = \frac{0.000594 * 420}{0.85 * 21.1} * 0.47 = 0.0065 m$$ y la profundidad del eje neutro:

$$0.0065 * 1.18 = 0.008\ m < t = 0.06\ m$$

Por lo tanto el diseño anterior presentado puede ser aceptable.

Adicionalmente para colocar 302mm^2 se usa la misma armadura utilizada anteriormente cuando se hizo la consideración aproximada de sección rectangular de 0.12x0.50 m: 1ϕ1/2"+1ϕ5/8", por lo que se puede aceptar como válida aquella suposición.

2. Para los pequeños valores obtenidos de ϕV_s se debe colocar estribos a una separación máxima de d/2 = 0.23 m o la correspondiente al refuerzo mínimo de cortante, la menor de las dos. Estas losas son excepción del Reglamento de colocación de refuerzo a la fuerza cortante donde V_u sea mayor que la mitad de la resistencia suministrada por el concreto ϕV_c.

3. En los apoyos donde no sea necesario colocar refuerzo a la fuerza cortante, se recomienda colocar ϕ 1/4"cada d/2 ó a la separación calculada para cumplir la cuantía mínima transversal, la menor de las dos, en una distancia medida desde el borde del apoyo hacia el centro de la luz como mínimo igual a la altura útil del elemento. En las estructuras de capacidad de disipación de energía moderada (DMO) y especial (DES), se recomienda la colocación de estos estribos en una distancia de dos veces la altura útil.

A continuación se incluyen el análisis detallado y el diseño de la losa nervada anterior, según el diagrama estructural y carga uniforme aproximada adjunta, utilizando un programa de análisis (RCBE 8.0) y diseño por el método de la resistencia última, con los mismos materiales y factores de seguridad empleados en la predimensión a fin de efectuar comparación:

```
GENERAL INPUT DATA
Structure type: Continuous Beam
AXES INFORMATION
Number of spans..... = 3          Beam total length. = 24.50 (m)
```


Support Axis	Span (m)
1-2	8.00
2-3	8.50
3-4	8.00

NODE DATA

Axis	Floor	X	Y	Z	Axis	Floor	X	Y	Z
A-1	1	0.00	0.00	0.00	A-2	1	0.00	8.00	0.00
A-3	1	0.00	16.50	0.00	A-4	1	0.00	24.50	0.00

MATERIALS

Number of materials = 1

REINFORCED CONCRETE

Mat	Name	f'c (MPa)	fy (MPa)	fys1 (MPa)	fys2 (MPa)	E (MPa)	G (MPa)	w (N/m3)
1	RConcretel	21.1	420	420	420	21600	8640	24000.0

MEMBER DATA

Total number of beams = 3

BEAM SECTIONS

Number of prismatic sections = 1

Sec	Name	Shape	b (mm)	h (mm)	tw (mm)	tf (mm)	P1 (mm)	P2 (mm)	A (mm2)	I2 (mm4)	I3 (mm4)	J (mm4)
1	Beam1	Rectang	120	500	-	-	-	-	60000	1.25E+09	7.20E+07	2.44E+08

BEAMS

Beam	Floor	L (m)	Lu (m)	a (m)	c (m)	Sec -	Mat -	System -
A(1-2)	1	8.00	8.00	0.00	0.00	1	1	G&L
A(2-3)	1	8.50	8.50	0.00	0.00	1	1	G&L
A(3-4)	1	8.00	8.00	0.00	0.00	1	1	G&L

G R O U N D S U P P O R T D A T A

Total number of ground supports = 4

K = Spring constant(KN/mm)

Characteristics for All Degrees of Freedom
Value = K Dash = free C = constrained

Support	Type	Uy	Uz	TetX
1	Fixed	C	C	C
2	Hinge	C	C	-
3	Hinge	C	C	-
4	Fixed	C	C	C

L O A D S

Total number of load cases = 2

LOAD CASE 1 : OTHER (OT)
LOAD CASE 2 : 1.45(OT)

Number of nodal loads ....= 0
Number of beam loads .....= 3

Beam Loads (DL)

Class = F: Force M: Moment
System = L: Local Force/Moment referred to local coordinates(1,2,3)
G: Global Force/Moment referred to global coordinates (X,Y,Z)
Axis = (1, 2, 3) if System = L, or (X, Y, Z) if System = G
Units = Distributed Force:(KN/m),Distributed Moment: (KN-m/m)
Concentrated Force: (KN), Concentrated Moment: (KN-m)

Distributed Force/ Moment

Beam	Floor	Class	Sys	Axis	A/L	B/L	Wi	Wj
A(1-2)	1	F	G	Z	0.00	1.00	8.95	8.95
A(2-3)	1	F	G	Z	0.00	1.00	8.95	8.95
A(3-4)	1	F	G	Z	0.00	1.00	8.95	8.95

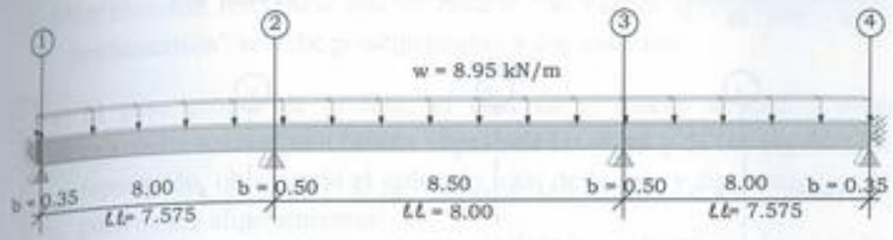


Figura 5.10

Linear Analysis- Beam End Forces

KN, KN-m

END I X/L = 0.0 M2(+)max
END J X/L = 1.0

Beam	Floor	Load	Axl	Shr2	Shr3	Torque	M2	M3	M2	X/L
			Axl	Shr2	Shr3	Torque	M2	M3		
A(1-2)	1	1	0.0	0.0	-35.0	0.0	-45.7	0.0	22.8	0.5
			0.0	0.0	36.6	0.0	-51.9	0.0		
		2	0.0	0.0	-50.8	0.0	-66.3	0.0	33.1	0.5
			0.0	0.0	53.1	0.0	-75.3	0.0		
A(2-3)	1	1	0.0	0.0	-38.0	0.0	-51.9	0.0	28.9	0.5
			0.0	0.0	38.0	0.0	-51.9	0.0		
		2	0.0	0.0	-55.1	0.0	-75.3	0.0	41.9	0.5
			0.0	0.0	55.1	0.0	-75.3	0.0		
A(3-4)	1	1	0.0	0.0	-36.6	0.0	-51.9	0.0	22.8	0.5
			0.0	0.0	35.0	0.0	-45.7	0.0		
		2	0.0	0.0	-53.1	0.0	-75.3	0.0	33.1	0.5
			0.0	0.0	50.8	0.0	-66.3	0.0		

DISEÑO VTA PROB 5-3 - b=120 mm - h=500 mm - fyl=420 MPa - fyt=240 MPa - U=1.45

	1		2			3			4
M (kN)	45.7	22.8	51.9	51.9	28.9	51.9	51.9	22.8	45.7
ϕM_n (kN-m)	66.3	33.1	75.3	75.3	41.9	75.3	75.3	33.1	66.3
ρ(-)	0.00723		0.00833	0.00833		0.00833	0.00833		0.00723
Ast (mm2)	408		470	470		470	470		408
φsuperior	1φ5/8+1φ3/4		1φ5/8+1φ3/4			1φ5/8+1φ3/4			1φ5/8+1φ3/4
ρ(+)		0.00344			0.00441			0.00344	
Ast (mm2)		194			249			194	
φinferior	1φ1/2	1φ3/8+1φ1/2	(1φ1/2+1φ1/2)		2φ1/2	(1φ1/2+1φ1/2)		1φ3/8+1φ1/2	1φ1/2
Vd (kN)	29.2		30.2	31.6		31.6	30.2		29.2
Vu (kN)	42.3		43.8	45.8		45.8	43.8		42.3
Vc (kN/m2)	33		33	33		33	33		33
φVs(kN/m2)	9.3		10.8	11.8		11.8	10.8		9.3
S (m)	1.19		1.30	1.38		1.38	1.30		1.19
Estribos	7cφ1/4c/0.23		id	7cφ1/4c/0.23		id	7cφ1/4c/0.23		id

ESTRIBOS CONSTRUCTIVOS φ1/4 C/0.30 HASTA DONDE EXISTA REFUERZO SUPERIOR

Notas:

1. La diferencia de armadura en el refuerzo superior en los apoyos 1 y 4 se debe a la consideración de empotramiento utilizada en la versión analizada en comparación con el semi-empotramiento correspondiente al método de los momentos y cortantes aproximados del Reglamento. Esta situación se refleja entonces en los refuerzos para flexión de las luces 1-2 y 3-4 y en los refuerzos por esfuerzo cortante.

2. La reiterada referencia que se hace a "las cargas aproximadas de la predimensión" se debe principalmente a dos aspectos:

   a) El peso propio de la losa, el cual en el diseño definitivo debe calcularse teniendo en cuenta el peso de las vigas y de las viguetas de repartición, obteniendo el volumen total de la losa y descontándole el peso de los aligeramientos;

   b) La carga correspondiente a los muros divisorios, la cual se debe calcular a partir de la cubicación de los mismos, según su distribución y tipo de material especificados en el proyecto arquitectónico. Sin embargo, el Reglamento colombiano especifica que se puede utilizar como carga distribuida en las losas un mínimo de 2kN/m^2 para muros-particiones fijos de mampostería.

Para efectos solamente ilustrativos, se diseña a continuación la viga V2 de la planta estructural correspondiente al problema 5-3, considerándola sometida solamente a cargas gravitacionales y analizándola como un pórtico de piso aislado de los pisos adyacentes superior e inferior, con empotramiento en los extremos lejanos de las columnas. Este procedimiento, además de ilustrar al lector sobre los temas anteriormente tratados, puede llegar a considerarse apropiado en el proceso de dimensionamiento preliminar de un proyecto.

Problema 5-4

Diseñar la viga V-2 (0.50x0.50) de la planta estructural correspondiente al problema anterior, para cargas únicamente gravitacionales y los mismos materiales y factores de carga y seguridad empleados en ese problema.

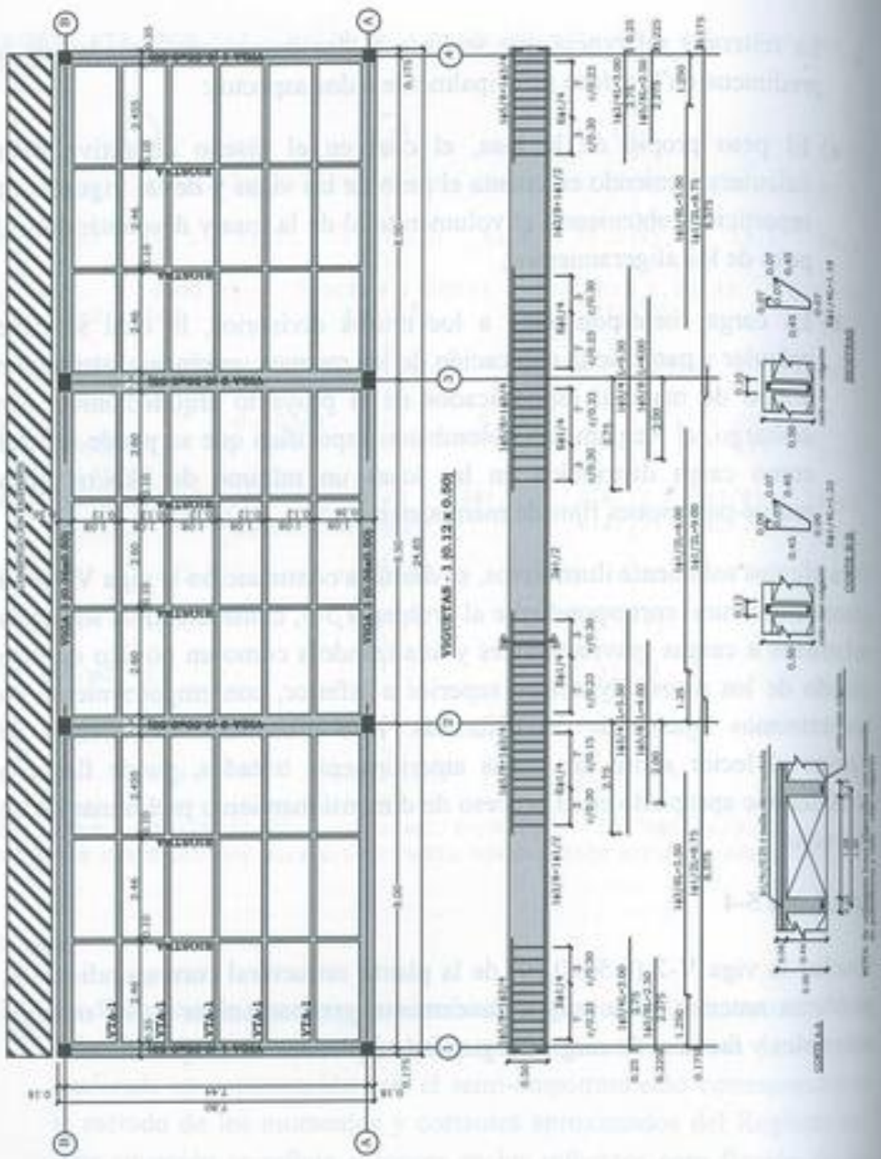


Figura 5.11

Solución

El análisis se realizó como un pórtico de piso aislado utilizando un procesador automático cuyos datos de entrada corresponden a la Figura 5.12 y cuyos resultados se anexa; el diseño se realizó por el método de la resistencia última con factores de carga y seguridad allí enunciados.

Para efectos del análisis de cargas se utiliza las reacciones de las viguetas obtenidas en la alternativa de análisis expuesta en el problema anterior y que, aplicadas como cargas concentradas cada 1.20 m se asimilaron a carga uniforme en kN/m. A continuación el esquema geométrico del pórtico y los resultados anunciados:

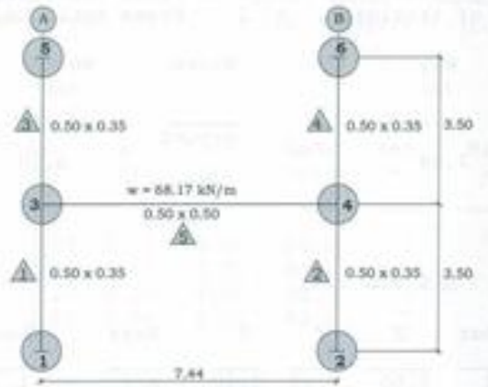


Figura 5.12

Cargas:

Peso propio de la viga:	0.50*0.50*1.00*24	=	6.00 kN/m
Losa aligerada:	72.60÷1.20	=	62.17kN/m
		w =	68.17kN/m

La hipótesis número 1 es la correspondiente a cargas gravitacionales y la hipótesis número 2 corresponde a la combinación cargas gravitacionales factorizadas.

Date: 5-10-2010 Time: 3:27:11

Company: JORGE SEGURA FRANCO
Engineer: Jorge I. Segura Franco
Project: Estructuras de Concreto I - Problema 5-4

Rectangular Plane Frame

| AXES INFORMATION |

Number of axes..... = 2 Frame total width... = 7.44 (m)
Number of stories.... = 2 Frame total height.. = 7.00 (m)

Axis	Bay (m)	Story	Height (m)
1		ground	
	7.44		3.50
2		2	
			3.50

N O D E D A T A

Axis	Floor	X	Y	Z	Axis	Floor	X	Y	Z
A-1	1	0.00	0.00	0.00	A-2	1	0.00	7.44	0.00
A-1	2	0.00	0.00	3.50	A-2	2	0.00	7.44	3.50
A-1	3	0.00	0.00	7.00	A-2	3	0.00	7.44	7.00

M A T E R I A L S

Number of materials = 1

REINFORCED CONCRETE

Mat	Name	f'c (MPa)	fy (MPa)	fys1 (MPa)	fys2 (MPa)	E (MPa)	G (MPa)	w (N/m3)
1	RConcrete1	21	420	420	420	21600	8640	24000.0

M E M B E R D A T A

Total number of members..... = 5
Number of columns..... = 4
Number of beams ..... = 1
Number of braces ..... = 0

C O L U M N S E C T I O N S

Number of prismatic sections = 1

Sec	Name	Shape	b (mm)	h (mm)	tw (mm)	tf (mm)	A (mm2)	I2 (mm4)	I3 (mm4)	J (mm4)
1	Column1	Rectang	500	350	-	-	175000	1.79E+09	3.65E+09	3.99E+09

COLUMNS

Column	Story	L (m)	Lu (m)	a (m)	c (m)	Theta (o)	Sec -	Mat -	System -
A-2	2	3.50	3.25	0.25	0.00	90.0	1	1	G&L
A-2	1	3.50	3.25	0.00	0.25	90.0	1	1	G&L
A-1	2	3.50	3.25	0.25	0.00	90.0	1	1	G&L
A-1	1	3.50	3.25	0.00	0.25	90.0	1	1	G&L

B E A M S E C T I O N S

Number of prismatic sections = 1

Sec	Name	Shape	b (mm)	h (mm)	tw (mm)	tf (mm)	A (mm2)	I2 (mm4)	I3 (mm4)	J (mm4)
1	Beam1	Rectang	500	500	-	-	250000	5.21E+09	5.21E+09	7.71E+09

BEAM

Beam	Floor	L (m)	Lu (m)	a (m)	c (m)	Sec -	Mat -	System -
A(1-2)	2	7.44	7.09	0.18	0.18	1	1	G&L

G R O U N D S U P P O R T D A T A

Total number of ground supports = 4

K = Spring constant(KN/mm)

Characteristics for All Degrees of Freedom
Value = K Dash = free C = constrained

Support	Floor	Type	Uy	Uz	TetX
1	1	Fixed	C	C	C
2	1	Fixed	C	C	C
1	3	Fixed	C	C	C
2	3	Fixed	C	C	C

L O A D S

Total number of load cases = 1

LOAD CASE 1 : OTHER (OT)

Number of nodal loads ....= 0
Number of column loads .. = 0
Number of beam loads .....= 1

Beam Loads (OT)

Class = F: Force M: Moment
System = L: Local Force/Moment referred to local coordinates (1,2,3)
G: Global Force/Moment referred to global coordinates (X,Y,Z)
Axis = (1, 2, 3) if System = L, or (X, Y, Z) if System = G
Units = Distributed Force:(KN/m),Distributed Moment: (KN-m/m)
Concentrated Force: (KN), Concentrated Moment: (KN-m)

Distributed Force/ Moment

Beam	Floor	Class	Sys	Axis	A/L	B/L	Wi	Wj
A(1-2)	2	F	G	Z	0.00	1.00	68.17	68.17

LOAD COMBINATIONS

No	Load combination
1	OT
2	1.45OT

P-Delta Analysis- Column End Forces

Units: KN, KN-m

Column	Stry	Load	Axial Axial	Shear2 Shear2	Shear3 Shear3	Torque Torque	Mom-2 Mom-2	Mom-3 Mom-3
			BOTTOM					
			TOP					
A-2	2	1	-126.8	0.0	-54.6	0.0	-115.3	0.0
			-126.8	0.0	-54.6	0.0	62.2	0.0
		2	-183.9	0.0	-79.2	0.0	-167.2	0.0
			-183.9	0.0	-79.2	0.0	90.2	0.0
A-2	1	1	126.8	0.0	-54.6	0.0	-62.2	0.0
			126.8	0.0	-54.6	0.0	115.3	0.0
		2	183.9	0.0	-79.2	0.0	-90.2	0.0
			183.9	0.0	-79.2	0.0	167.2	0.0
A-1	2	1	-126.8	0.0	54.6	0.0	115.3	0.0
			-126.8	0.0	54.6	0.0	-62.2	0.0
		2	-183.9	0.0	79.2	0.0	167.2	0.0
			-183.9	0.0	79.2	0.0	-90.2	0.0
A-1	1	1	126.8	0.0	54.6	0.0	62.2	0.0
			126.8	0.0	54.6	0.0	-115.3	0.0
		2	183.9	0.0	79.2	0.0	90.2	0.0
			183.9	0.0	79.2	0.0	-167.2	0.0

P-Delta Analysis- Beam End Forces

Units: KN, KN-m

END I X/L = 0.0 M2(+)max
END J X/L = 1.0

Beam	Floor	Load	Axl Axl	Shr2 Shr2	Shr3 Shr3	Torque Torque	M2 M2	M3 M3	M2	X/L
A(1-2)	2	1	0.0 0.0	0.0 0.0	-241.7 241.7	0.0 0.0	-214.6 -214.6	0.0 0.0	213.7	.5
		2	0.0 0.0	0.0 0.0	-350.5 350.5	0.0 0.0	-311.2 -311.2	0.0 0.0	303.8	.5

P-Delta Analysis- Support Reactions

Support		Load	Force (KN)			Moment (KN-m)		
Axis	Floor	LdCase	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	1	1	0.00	54.63	126.80	62.24	0.00	0.00
		2	0.00	79.21	183.86	90.25	0.00	0.00
2	1	1	0.00	-54.63	126.80	-62.24	0.00	0.00
		2	0.00	-79.21	183.86	-90.25	0.00	0.00
1	3	1	0.00	-54.63	126.80	62.24	0.00	0.00
		2	0.00	-79.21	183.86	90.25	0.00	0.00
2	3	1	0.00	54.63	126.80	-62.24	0.00	0.00
		2	0.00	79.21	183.86	-90.25	0.00	0.00

A partir de las fuerzas internas en los extremos de los elementos obtenemos los diagramas de corte y flexión, diseñando para los apoyos y la luz así:

Punto de corte nulo al borde de la columna:

$$x_o = \frac{241.7}{68.17} = 3.545\,\text{m}$$

Momento positivo máximo ($x = x_o$):

$M_{(+)}máx = 213.70\text{kN·m}$

Puntos de momento nulo:

$$M = 241.7x - \frac{68.17x^2}{2} - 214.6 = 0 \qquad \therefore x = 1.041\text{ m y }6.051\text{ m}$$

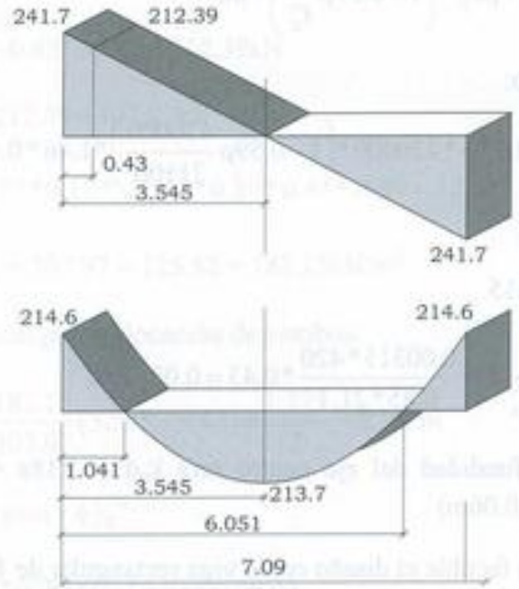


Figura 5.13

Diseño de la luz

Trabajando como viga rectangular de 0.50 x 0.50 m, con "d" = 0.43 m:

$\phi M_n = 1.45*213.7 = 309.9\text{kN·m}$

$\rho = 0.01006 \quad \therefore \quad A_s = 0.01006*0.50*0.43 = 0.002163\ \text{m}^2 \sim 2163\ \text{mm}^2$

Armadura: $2\phi 1" + 3\phi 7/8"$ ($2181\ \text{mm}^2$ abajo).

Trabajando como viga "T", el máximo ancho de aleta corresponde a la especificación $16t + b' = 16*0.06 + 0.50 = 1.46$ m. Suponiendo una viga rectangular de 1.30 x 0.50 buscamos la posición del eje neutro a partir de:

$$\phi M_n = \phi * \rho f_y * \left(1 - 0.59\rho \frac{f_y}{f'_c}\right) * bd^2$$

Reemplazando:

$$309.9 = 0.9 * \rho * 420000 * \left(1 - 0.59\rho \frac{420000}{21100}\right) * 1.46 * 0.43^2$$

de donde:

$\rho = 0.00315$

$$a = \frac{\rho f_y}{0.85 f'_c} d = \frac{0.00315 * 420}{0.85 * 21.1} * 0.43 = 0.0317 \text{ m}$$

Luego la profundidad del eje neutro será $k_u d = 1.18a = 1.18*0.0317 = 0.0374$ m < t (0.06m)

Por lo tanto es factible el diseño como viga rectangular de 1.46 m de ancho:

$A_s = 0.00317*1.46*0.43 = 0.001990 \text{ m}^2 \sim 1990 \text{ mm}^2$ – 4ϕ7/8"+1ϕ1" (2058 mm^2)

Se tiene entonces una armadura teórica un poco inferior a la de la viga rectangular inicial, a escogencia del diseñador.

Diseño de los apoyos

Sólo es posible la opción de viga rectangular de 0.50 x 0.50 m.

$\phi M_n = 1.45*214.6 = 311.21$ kN·m

$\therefore \rho = 0.010106$

$A_s = 0.010106*0.50*0.43 = 0.002173 \text{ m}^2 \sim 2173 \text{ mm}^2$

Armadura: 2ϕ1"+3ϕ7/8" (2181 mm^2 arriba).

Esfuerzo cortante

$V_d = 241.7 - 0.43*68.17 = 212.39$kN

$V_u = 1.45*212.39 = 307.97$kN

$$\therefore \phi V_c = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 0.50 * 0.43 * 1000 = 125.82 \text{ kN/m}^2$$

$\therefore V_u - \phi V_c = 307.97 - 125.82 = 182.15 \text{kN/m}^2$

Distancia total para colocación de estribos:

$$S = 0.43 + \frac{182.15}{307.97}(3.545 - 0.43) + \frac{1.273}{2} = 2.91 \text{ m}$$

Separación para ε ϕ 3/8":

$$s = \frac{0.75 * 2 * 0.000071 * 420000 * 0.43}{182.15} = 0.106 \sim 0.10 \text{ m}$$

Estribos: 13ε ϕ 3/8" c/0.10 + 9ε ϕ 3/8" c/0.20 a partir del borde en cada apoyo.

Separación máxima para este caso

$$\frac{d}{2} = \frac{0.43}{2} = 0.215 \text{ ó}$$

$$s = \frac{A_v f_{yt}}{0.35 b_w} = \frac{2*71*420}{0.35*500} = 340.8 \text{ mm} \sim 0.34 \text{ m}$$

En la parte central: $\varepsilon \phi \frac{3}{8}$" c/0.30

Resumen del diseño:

	(A)		(B)
M (kN·m) =	214.6	213.7	214.6
ϕM_n (kN·m) =	311.2	309.9	311.2
ρ	0.01006	0.00317 (sección "T")	0.01006
A_s (mm^2) =	2163	1990	2163
ϕsuperior:	2ϕ1"+3ϕ7/8	2ϕ1"	2ϕ1"+3ϕ7/8
ϕinferior:	2ϕ7/8+1ϕ1"	4ϕ7/8"+1ϕ1"	1ϕ1"+2ϕ7/8"
V (kN) =	241.7		241.7
V_d (kN) =	212.39		212.39
V_u =	307.97		307.97
ϕV_s (kN) =	182.15		182.15
S total (m) =	2.27 + 0.64 = 2.91		2.91
Estribos:	13$\varepsilon\phi$ 3/8" c/0.10+ 9$\varepsilon\phi$ 3/8" c/0.20	$\varepsilon\phi$ 3/8" c/0.30	13$\varepsilon\phi$ 3/8" c/0.10+ 9$\varepsilon\phi$ 3/8" c/0.20

Detalle:

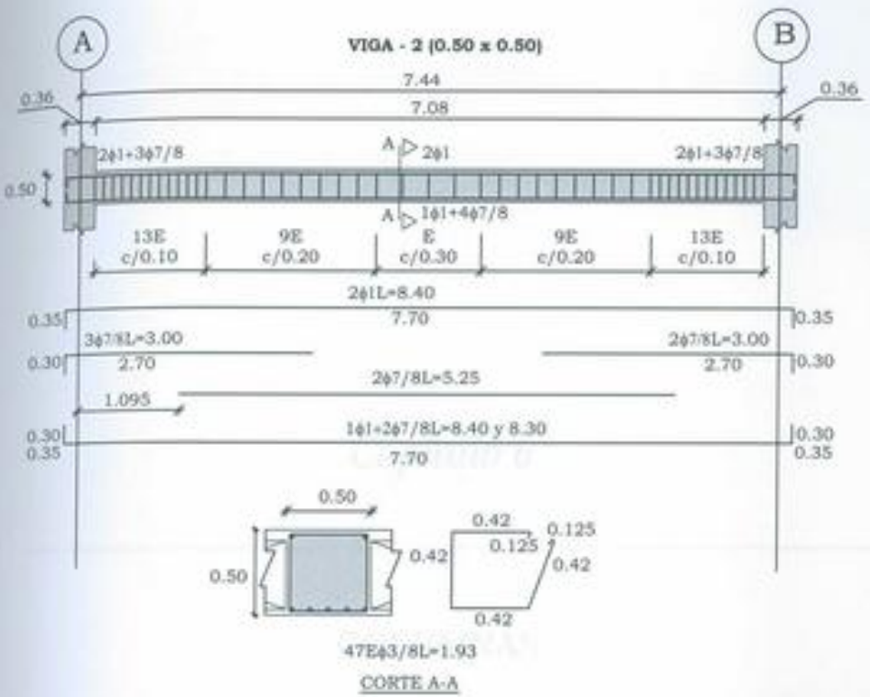


Figura 5.14

Capítulo 6

COLUMNAS

COLUMNAS

Las columnas son elementos estructurales sometidos principalmente a carga axial de compresión o a compresión y flexión, incluyendo o no torsión o esfuerzos cortantes y con una relación de longitud a la menor dimensión de la sección de 3 o más.

Tipos

Distinguimos los siguientes tipos de columnas:

1. Columnas reforzadas longitudinalmente con barras redondas y transversalmente con estribos o espirales.

Figura 6.1

2. Columnas compuestas reforzadas longitudinalmente con perfiles de acero estructural rodeados o no por concreto o concreto llenando dichos perfiles en ocasiones con barras redondas longitudinales y algún tipo de refuerzo transversal.

Figura 6.2

DIMENSIONAMIENTO

Dimensiones mínimas

El Reglamento colombiano NSR-10 no contempla la restricción de dimensiones mínimas para las estructuras con capacidad mínima de disipación de energía. Unicamente en la sección CR10.8 se mencionan con el carácter de informativo. Para estructuras con capacidad de disipación de energía moderada (DMO) y especial (DES) se especifica las dimensiones mínimas de columnas en el capitulo C.21 en las secciones C.21.3.5.1 y C.21.6.1.1 respectivamente, a los que nos referimos a continuación:

Estructuras con capacidad moderada de disipación de energía (DMO)

"La dimensión menor de la sección transversal, medida en una línea recta que pasa a través del centroide geométrico, no debe ser menor de 250 mm. Las columnas en forma de T, C o I, pueden tener una dimensión mínima de 0.20 m, pero su área no puede ser menor de 0.0625 m^2". Se sugiere que la relación entre la dimensión menor de la sección transversal y la dimensión perpendicular no debe ser menor que 0.3.

Estructuras con capacidad especial de disipación de energía (DES)

"La dimensión menor de la sección transversal, medida en una línea recta que pasa a través del centroide geométrico, no debe ser menor de 300 mm. Las columnas en forma de T, C o I, pueden tener una dimensión mínima de 0.25 m, pero su área no puede ser menor de 0.09 m^2". La relación entre la dimensión menor de la sección transversal y la dimensión perpendicular no debe ser menor que 0.4.

En todas las estructuras, DMI, DMO, y DES la fuerza axial mayorada de compresión P_u, bajo cualquier combinación de carga, debe exceder $0.10f'_cA_g$.

REFUERZO

Refuerzo longitudinal

El área de refuerzo longitudinal de la columna, sin tener en cuenta la capacidad de disipación de energía de la estructura a la cual pertenece, no debe ser menor de 0.01 ni mayor de 0.04 veces el área total A_g de la sección.

El número mínimo de barras del refuerzo longitudinal es de 4 para barras colocadas dentro de estribos rectangulares o circulares, de 3 dentro de estribos triangulares y de 6 para barras longitudinales colocadas dentro de espirales que cumplan los requisitos del Reglamento NSR-10.

Pese a no estar especificado en el Reglamento colombiano, se recomienda como diámetro mínimo de las barras de refuerzo longitudinal el No. 4 para estructuras de capacidad de disipación de energía mínima (DMI) y moderada (DMO); para estructuras con capacidad de disipación de energía especial (DES) se recomienda como diámetro mínimo para el refuerzo longitudinal el No. 5.

Especifica el Reglamento colombiano que en las barras longitudinales dobladas en las columnas por cambio de la sección se debe cumplir que la pendiente de la parte inclinada de una barra de este tipo no debe exceder de 1 a 6 con respecto al eje de la columna y las partes de la barra que están arriba y debajo de la zona de doblez deben ser paralelas al eje de la columna. Las barras en los cambio de sección, lo cual solo se hara en las losas de entrepiso, se deben doblar antes de su colocación en el encofrado y nunca después de fundido el concreto y estar las barras parcialmente embebidas en el concreto endurecido. Cuando la cara de una columna esta desalineada 75 mm o más por cambio de sección, las barras longitudinales no se deben doblar. Se deben proporcionar espigos empalmados por traslapo con las barras longitudinales adyacentes a las caras desalineadas de la columna.

El Reglamento especifica que debe proporcionarse soporte horizontal adecuado a la barra doblada por cambio de sección por medio de estribos transversales, espirales o porciones del sistema de entrepiso. El soporte horizontal debe diseñarse para resistir 1.5 veces la componente horizontal de la fuerza calculada en la porción inclinada de la barra. Los estribos transversales o espirales, en caso de utilizarse, se deben colocar a una distancia no mayor de 150 mm de los puntos de doblado.

En columnas con estribos o con refuerzo en espiral, la distancia libre entre barras longitudinales debe ser mayor o igual a $1.5d_b$ (d_b = diámetro nominal de la barra), 40 mm o 1.33 veces el tamaño del agregado grueso.

El recubrimiento mínimo para el refuerzo en columnas de concreto vaciado en el sitio será de 40 mm para la armadura principal los estribos y los espirales; en ambientes agresivos deben utilizarse recubrimientos mayores.

Empalme de barras longitudinales

Se puede utilizar empalmes por traslapo, empalmes mecánicos, empalmes soldados a tope, conexiones mecánicas o empalmes a tope con el cumplimiento de los requisitos contenidos en el Reglamento NSR-10 y satisfaciendo los requerimientos para todas las combinaciones de carga de las columnas. Por ser los empalmes por traslapo los más usuales, se citan a continuación algunos de los requisitos mencionados para este tipo de empalme:

- Cuando los esfuerzos en la barra a empalmar, debidos a las cargas mayoradas, son de compresión, la longitud mínima para empalmes traslapados a compresión es de $0.071f_y d_b$ para f_y de 420 MPa o menos, o $(13f_y - 24)d_b$ para f_y mayor de 420 MPa, y nunca debe ser menor de 300 mm. Para f'_c menores de 21.1 MPa la longitud del traslapo debe incrementarse en un tercio.

- Cuando por traslapo a compresión se empalmen barras de diferente diámetro, la longitud de traslapo debe ser la mayor entre la longitud de desarrollo de la barra mayor y la longitud de traslapo de la barra menor.

- Cuando en las barras longitudinales de la columna los esfuerzos debidos a las cargas mayoradas y calculados para las diversas combinaciones de carga no exceden de $0.5\ f_y$ en tracción, los empalmes por traslapo deben ser Clase B, en cualquier sección donde se empalma más de la mitad de las barras, o Clase A donde se empalma la mitad o menos de las barras y los empalmes entre barras alternas se escalonan a una distancia al menos igual a ℓ_d.

- Cuando los esfuerzos en las barras longitudinales de la columna debidos a las cargas mayoradas son mayores de $0.5\ f_y$ en tracción, los empalmes por traslapo deben ser Clase B.

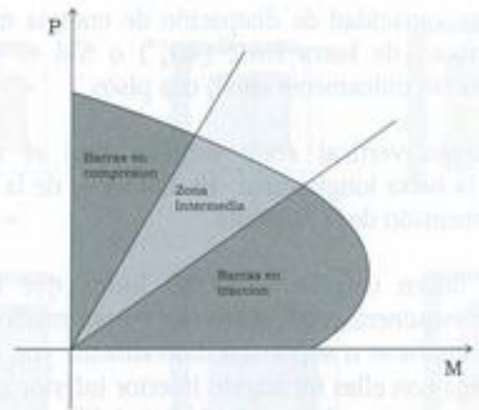


Diagrama de interacción

Figura 6.3

- Para estructuras con capacidad de disipación de energía moderada y especial (DMO y DES), los empalmes por traslapo se permiten únicamente en la mitad central de la longitud del elemento y deben diseñarse como empalmes en tracción y deben estar confinados dentro del refuerzo transversal correspondiente según el grado de disipación (véase capítulo C.21 del Reglamento). Se invita al lector a la sección C.12.17 del Reglamento colombiano como aclaración y ampliación de los requisitos anteriores.

Refuerzo Transversal

Está constituido por estribos o flejes y refuerzo en espiral. A continuación algunos requisitos que deben cumplir estos refuerzos:

Estribos

- El Reglamento NSR-10 especifica estribos de barra No.3 (ϕ3/8") o 10M (10 mm) cuando las barras longitudinales sean iguales o menores a la No.10 (1¼") o 32M (32 mm), y al menos de barra No.4 (ϕ1/2") o 12M (12 mm) cuando las barras longitudinales sean mayores o iguales a la No.11 (1⅜") o 35M (35 mm) o se trate de barras en paquete. En estructuras con capacidad de disipación de energía mínima (DMI) se permiten estribos de barra No.2 (ϕ1/4") o 6M (6 mm) cuando las columnas soportan únicamente uno o dos pisos.

- El espaciamiento vertical entre estribos será el menor entre 16 diámetros de la barra longitudinal, 48 diámetros de la barra del estribo o la menor dimensión de la columna.

- Los estribos deben disponerse de tal forma que todas las barras longitudinales esquineras y al menos una de por medio de las que no lo son, puedan amarrarse o soportarse lateralmente con la esquina de un estribo que haga con ellas un ángulo interior inferior a 135°, y ninguna barra deberá estar separada más de 150 mm libres medidos a lo largo del estribo desde una barra soportada como antes se dijo. Cuando las barras longitudinales estén localizadas a lo largo del perímetro de un círculo, puede utilizarse un estribo circular completo.

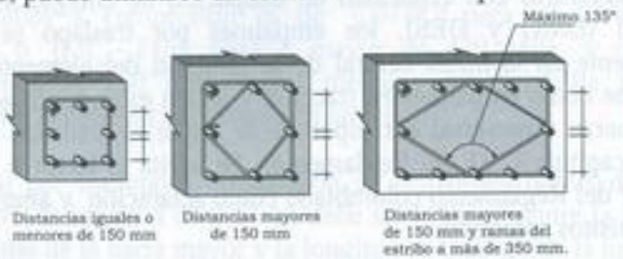


Figura 6.4

Deben colocarse estribos adicionales dentro de los nudos o conexiones de vigas y columnas, a fin de confinar el concreto y garantizar su funcionamiento. El área de refuerzo transversal no puede ser menor que la dada por la ecuación:

$$A_v \geq \frac{0.062\sqrt{f'_c}\,b_w s}{f_{yt}} \geq \frac{0.35 b_w s}{3 f_{yt}}$$

y se debe colocar en una distancia igual a la altura del elemento más alto de los que llegan a las columnas.

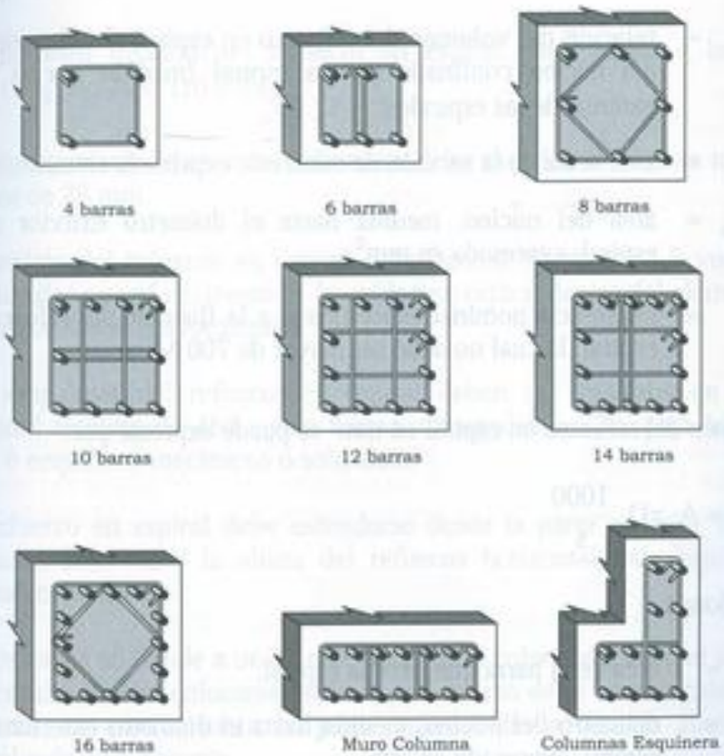


Figura 6.5

Espirales

Refuerzo transversal consistente en barras continúas igualmente espaciadas, alineadas y firmemente fijadas en su lugar por medio de espaciadores verticales. Se diseñan de manera que la denominada cuantía del refuerzo en espiral ρ_s no sea menor que el valor dado por la expresión:

$$\rho_s = 0.45\left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1\right)\frac{f'_c}{f_{yt}}$$

en donde:

ρ_s = relación del volumen del refuerzo en espiral al volumen total del núcleo confinado por la espiral (medido por la parte exterior de las espirales) = V_e / V_c

A_g = área bruta de la sección de concreto, expresada en mm^2.

A_{ch} = área del núcleo, medida hasta el diámetro exterior de la espiral, expresada en mm^2.

f_{yt} = resistencia nominal especificada a la fluencia del refuerzo en espiral, la cual no debe ser mayor de 700 MPa.

El volumen del refuerzo en espiral en mm^3 se puede expresar por:

$$V_e = A_s \pi D_c \frac{1000}{s}$$

en donde:

A_s = área de la barra que hace la espiral.

D_c = diámetro del núcleo, medido hasta el diámetro exterior de la espiral, expresado en mm.

s = paso o separación entre espiras, expresado en mm.

El volumen del núcleo, medido por la parte exterior de la espiral, expresado en mm^3, se calcula por:

$$V_c = \frac{\pi D_c^{\,2}}{4} * 1000$$

para una longitud de 1000 mm de columna.

A continuación algunos requisitos que debe cumplir el refuerzo transversal en espiral:

- El diámetro mínimo del refuerzo en espiral corresponde a barras N°3 ($\phi \frac{3}{8}"$) o 10M (10 mm).
- El espaciamiento libre entre hélices no debe exceder de 75 mm ni ser menor de 25 mm.
- El anclaje del refuerzo en espiral debe hacerse mediante 1.5 vueltas adicionales en cada extremo de la unidad en espiral dentro del elemento correspondiente allí localizado.
- Los empalmes del refuerzo en espiral deben ser traslapos en una longitud mínima de $48d_b$, para barras corrugadas o $72d_b$ para barras lisas o empalmes mecánicos o soldados.
- El refuerzo en espiral debe extenderse desde la parte superior de la zapata o losa hasta la altura del refuerzo horizontal más bajo del elemento soportado.
- En los casos en donde a una o más caras de la columna no llegan vigas o ménsulas, deben colocarse estribos por encima de la terminación del refuerzo en espiral hasta la parte inferior de la losa o ábaco o descolgado para cortante.

- En columnas con capitel, el refuerzo en espiral debe llevarse hasta el punto en donde el diámetro o ancho del capitel es el doble del de la columna.

En estructuras de capacidad de disipación de energía mínima (DMI), de capacidad de disipación de energía moderada (DMO) y de capacidad de disipación de energía especial (DES), para construcciones sismo resistentes debe cumplirse además con otros requisitos contenidos en el Reglamento algunos de los cuales se mencionarán a continuación.

Capacidad de disipación de energía mínima (DMI)

- No obstante no estar especificado en el Reglamento, se sugiere la siguiente colocación de estribos de confinamiento de diámetro No. (ϕ⅜") o 10M (10 mm) con una resistencia nominal a la fluencia del acero de mínimo f_{yh} de 240 MPa y una separación s de 150 mm, en una longitud ℓ_o medida a lo largo del eje longitudinal del elemento y desde la cara del nudo, no menor que:
  - la máxima dimensión del elemento en la cara del nudo.
  - ⅙ de la longitud libre del elemento
  - 500 mm
- Si la distancia horizontal entre dos ramas paralelas de estribos es mayor que la mitad de la menor dimensión de la sección de la columna o 200 mm deben utilizarse estribos suplementarios del mismo diámetro y calidad.

Capacidad de disipación de energía moderada (DMO)

Debe utilizarse refuerzo en espiral o estribos cerrados de confinamiento de acuerdo a las siguientes especificaciones, a menos que se requiera cantidades mayores para esfuerzo cortante. Cuando se utilice refuerzo en

espiral la cuantía volumétrica del refuerzo en espiral, ρ_s, o de estribos de confinamiento circulares, debe ser mayor que:

$$\rho_s = 0.08\frac{f'_c}{f_{yt}} \geq 0.45\left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1\right)\frac{f'_c}{f_{yt}}$$

Cuando se utilicen estribos rectangulares, el área de los estribos para un diámetro mínimo No.3 (ϕ⅜") o 10M (10 mm) no puede ser menor que:

$$A_{sh} = 0.20\frac{sb_c f'_c}{f_{yt}}\left[\left(\frac{A_g}{A_{ch}}\right) - 1\right] \quad \text{ó}$$

$$A_{sh} = 0.06\frac{sb_c f'_c}{f_{yt}}$$

para las dos direcciones principales de la sección de la columna.

La separación máxima del refuerzo transversal de confinamiento debe ser menor que:

- $8d_b$ de la barra longitudinal más pequeña.
- $16d_b$ del diámetro del estribo.
- ⅓ de la dimensión mínima de la sección del elemento.
- 150 mm.

Alternativamente al refuerzo anterior, pueden colocarse estribos de confinamiento de diámetro No. (ϕ⅜") o 10M (10 mm) con f_{yt} de 420 MPa, con una separación s de 100 mm. Si la distancia horizontal entre dos ramas paralelas del estribo es mayor que la mitad de la menor dimensión de la sección de la columna o 200 mm, debe usarse estribos suplementarios del mismo diámetro y calidad.

El refuerzo de confinamiento se localizará en una longitud ℓ_o medida a lo largo del eje longitudinal del elemento y desde la cara del nudo, no menor que:

- ⅙ de la longitud libre del elemento.
- mayor dimensión de la sección transversal de la columna.
- 500 mm.

En la zona donde no se coloca refuerzo transversal por confinamiento, el espaciamiento centro a centro del refuerzo transversal no debe ser mayor a dos veces el utilizado en la zona de confinamiento.

Capacidad de disipación de energía especial (DES)

Debe utilizarse refuerzo en espiral o estribos cerrados de confinamiento de acuerdo a las siguientes especificaciones, a menos que se requieran cantidades mayores para esfuerzo cortante. Cuando se utilice refuerzo en espiral la cuantía volumétrica del refuerzo en espiral, ρ_s, o de estribos de confinamiento circulares, debe ser mayor que:

$$\rho_s = 0.12\frac{f'_c}{f_{yt}} \geq 0.45\left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1\right)\frac{f'_c}{f_{yt}}$$

Cuando se utilicen estribos rectangulares, el área de los estribos para un diámetro mínimo No.3 (ϕ⅜") o 10M (10 mm) no puede ser menor que:

$$A_{sh} = 0.30\frac{sb_c f'_c}{f_{yt}}\left[\left(\frac{A_g}{A_{ch}}\right) - 1\right] \quad \text{ó}$$

$$A_{sh} = 0.09\frac{sb_c f'_c}{f_{yt}}$$

para las dos direcciones principales de la sección de la columna.

El refuerzo transversal de confinamiento puede estar constituido por estribos sencillos o múltiples y también estribos suplementarios de las mismas especificaciones. Los estribos suplementarios, o las ramas de los estribos múltiples, no deben estar separados a más de 350 mm centro a centro en la dirección perpendicular al eje del elemento estructural.

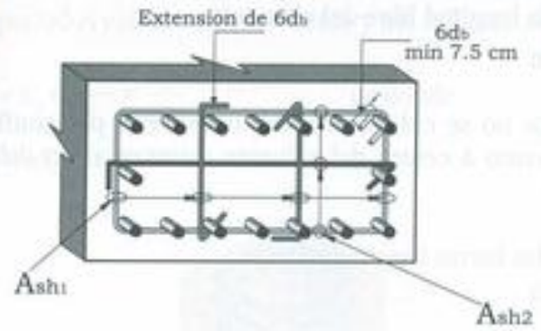


Figura 6.6

La separación del refuerzo transversal a lo largo del eje longitudinal del elemento no debe exceder la menor de:

- la cuarta ¼ parte de la dimensión mínima del elemento;
- seis veces el diámetro de la barra longitudinal menor
- s_o, según lo definido en la ecuación C.21-5 del Reglamento.

$$s_o = 100 + \left(\frac{350 - h_x}{3}\right)$$

El valor de s_o no debe ser mayor de 150 mm y no es necesario tomarlo menor a 100 mm

El refuerzo de confinamiento se localizará en una longitud ℓ_o medida a lo largo del eje longitudinal del elemento y desde la cara del nudo, no menor que:

- la altura del elemento en la cara del nudo o en la sección donde puede ocurrir fluencia por flexión;
- $\frac{1}{6}$ de la longitud libre del elemento;
- 450 mm

En la zona donde no se coloca refuerzo transversal por confinamiento, el espaciamiento centro a centro del refuerzo transversal no debe ser mayor que el menor de:

- $6d_b$ de las barras longitudinales
- 150 mm

Las columnas que soportan reacciones de elementos rígidos discontinuos como muros, deben tener refuerzo transversal en su altura total, en todos los niveles. El refuerzo transversal debe extenderse en el elemento discontinuo por una distancia al menos igual a la longitud de desarrollo ℓ_d de la barra de la columna longitudinal mayor, donde ℓ_d se determina por las especificaciones contenidas en C.21.7.5 del Reglamento. Si el extremo inferior de la columna termina en un muro, el refuerzo transversal requerido debe extenderse dentro del muro por lo menos ℓ_d de la mayor barra longitudinal de la columna en el punto en que termina. Si la columna termina en una zapata o una losa de cimentación, el refuerzo transversal requerido debe extenderse por lo menos 300 mm en la zapata o losa de cimentación.

A continuación se hará referencia a las columnas con carga axial; luego, las columnas con carga axial y momento y se finalizará con el estudio de los efectos de esbeltez en columnas, incluyendo el tratamiento para los esfuerzos cortantes en un modelo de aplicación (Problema 6.6) de los anteriores conceptos.

Columnas con carga axial

Obtener una expresión de diseño para columnas cortas con carga axial por medio de la teoría de la elasticidad, aclarando la expresión actualmente en uso y su relación con las denominadas cargas de servicio.

Al someter una columna a una carga P debería acortarse en Δ, que en los respectivos períodos elásticos del concreto y del refuerzo significa:

$$\Delta = \varepsilon_c = \varepsilon_s = \frac{f_c}{E_c} = \frac{f_s}{E_s}, \qquad \text{de donde:}$$

$$f_s = nf_c$$

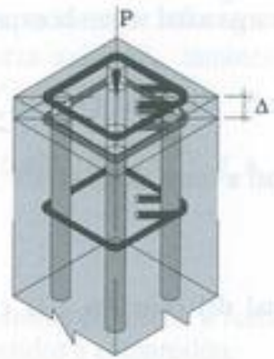


Figura 6.7

Si se denomina:

A_g: área bruta de la sección, expresada en m^2

$A_g - A_{st}$: área del concreto en la sección, expresada en m^2

A_{st}: área total del refuerzo longitudinal, expresada en m^2

se puede plantear:

$$P = (A_g - A_{st})f_c + A_{st}f_s = (A_g - A_{st})f_c + A_{st}nf_c$$

$$P = f_c(A_g + (n-1)A_{st})$$

Esta expresión, que permitiría el diseño (obtención de A_g y A_{st}) de una columna en función de la carga axial P, ha sido abandonada en la actualidad por las siguientes consideraciones sobre el material concreto que nos impiden igualar las deformaciones:

1. El concreto no es un material elástico.
2. Los fenómenos de retracción de fraguado, o sea, la disminución de volumen del concreto por secamiento, y la fluencia lenta, es decir, la deformación adicional a largo plazo por la acción de cargas de compresión permanentes.

Experimentalmente se ha logrado establecer la carga de falla de una columna corta sometida a carga axial según la expresión:

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{U * P}{\phi} = F.de\ S. * P = 0.85f'_c\left(A_g - A_{st}\right) + A_{st}f_y$$, en donde:

P_n = resistencia nominal a carga axial, en kN

U= factor de carga

f'_c = resistencia nominal del concreto a la compresión, expresada en kN/m^2

f_y = resistencia nominal a la fluencia del acero de refuerzo, expresada en kN/m^2

Tal como se expresa arriba, si a la expresión de falla se le aplica un factor de seguridad apropiado, se tendrá una expresión de diseño en función de la carga axial de servicio aplicable a columnas cortas, es decir, no afectadas por la esbeltez. Así, por ejemplo, si se considera aplicable un factor de seguridad de 3, resulta:

$$3P = 0.85f'_c\left(A_g - A_{st}\right) + f_y A_{st}$$

en donde P será la carga de servicio o de trabajo de la columna.

A este respecto, el Reglamento NSR-10, al igual que el Reglamento ACI-318-11, consideran el diseño por carga axial a compresión como una condición hipotética de carga, puesto que limitan la resistencia de los miembros sujetos a esta condición al 80 u 85% de la resistencia a la carga axial de diseño arriba expresada. Así, para elementos no preesforzados, con refuerzo transversal en forma de estribos cerrados apropiados, la resistencia de diseño a fuerza axial ϕP_n, según los Reglamentos mencionados, no será mayor que:

$$\phi P_n\ (máxima) = 0.75\phi\left[0.85f'_c\left(A_g - A_{st}\right) + f_y A_{st}\right]$$

Para elementos no preesforzados con refuerzo en espiral apropiado, la resistencia de diseño a fuerza axial ϕP_n, también según los Reglamentos antes citados, no será mayor que:

$$\phi P_n\ (máxima) = 0.80\phi\left[0.85f'_c\left(A_g - A_{st}\right) + f_y A_{st}\right]$$

en donde:

ϕP_n (máxima) = resistencia de diseño a fuerza axial de los elementos sometidos a compresión.

ϕ = coeficiente de reducción de resistencia igual a 0.65 para miembros a compresión axial con o sin flexión y refuerzo transversal en estribos; para refuerzo transversal en espiral el coeficiente valdrá 0.75.

De esta manera, valores de U aproximados a los especificados para estructuras corrientes, U = 1.5, equivalen a factores de seguridad elevados como pueden ser 3.0 para columnas armadas con estribos y 2.50 para columnas armadas con espirales, así:

Para estribos: $3P = \frac{\phi P_{n\ máx}}{0.75*\phi} = \frac{U*P}{0.75*0.65}$ $\therefore U = 1.46 \sim 1.5$

Para espirales: $2.50P = \frac{\phi P_{n\ máx}}{0.80*\phi} = \frac{U*P}{0.80*0.75}$ $\therefore U = 1.50$

En los comentarios del Reglamento, se explica esta reducción de la resistencia de diseño de una sección en sólo compresión, para de esta forma tener en cuenta las posibles excentricidades accidentales no consideradas en el análisis y el hecho por el cual la resistencia del concreto resulte inferior a f'_c para cargas altas permanentes; si éstas son las razones de la reducción, adicionadas con la dificultad de lograr en la práctica la condición de sólo carga axial, se prefiere la especificación que no acepta el diseño para carga axial solamente, exigiendo que éste se efectúe para la carga axial obtenida del análisis estructural correspondiente aumentada de una excentricidad mínima, de acuerdo a las siguientes expresiones:

- Excentricidad mínima para columnas con estribos = 0.10t
- Excentricidad mínima para columnas con espirales = 0.05t

en donde t es la dimensión de la columna en el sentido de la excentricidad.

Por tanto, es opinión del autor que la utilización más apropiada de la expresión para diseño con carga axial solamente, corresponde a la verificación de las dimensiones mínimas como límite de un diseño y en algunos casos puede considerarse como dimensionamiento preliminar. A continuación se verá su utilización en predimensión.

Problema 6.1

Obtener una expresión utilizable para la obtención de una posible dimensión mínima o para el dimensionamiento preliminar, con este criterio, de columnas con la sección A_g (en m^2) en función de la carga P de compresión (en kN) supuesta axial, si se utiliza una armadura longitudinal del 1% de la sección, factor de seguridad de 3.0, concreto para f'_c = 21.1 MPa y 35.2 MPa y refuerzo de las calidades f_y = 240 MPa y 420 MPa.

a) $f'_c = 21.1\ MPa = 21100\ kN/m^2$ y $f_y = 240\ MPa = 240000\ kN/m^2$

$P_n = 3P = 0.85f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$

$3P = 0.85 * 21100(A_g - 0.01A_g) + 240000 * 0.01A_g = 20155\ A_g$

$\therefore A_g = 0.00015P$ para A_g en m^2 y P en kN

b) $f'_c = 21.1\ MPa$ y $f_y = 420\ MPa$

$P_n = 3P = 0.85f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$

$3P = 0.85 * 21100(A_g - 0.01A_g) + 420000 * 0.01A_g = 21955\ A_g$

$\therefore A_g = 0.00014P$ para A_g en m^2 y P en kN

c) $f'_c = 35.2\ MPa = 35200\ kN/m^2$ y $f_y = 240\ MPa$

$P_n = 3P = 0.85f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$

$3P = 0.85*35200(A_g - 0.01A_g) + 240000*0.01A_g = 32021\ A_g$

$\therefore A_g = 0.000094P \sim 0.00010P$ para A_g en m^2 y P en kN

d) $f'_c = 35.2\ MPa$ y $f_y = 420\ MPa$

$P_n = 3P = 0.85f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$

$3P = 0.85*35200(A_g - 0.01A_g) + 420000*0.01A_g = 33821\ A_g$

$\therefore A_g = 0.000089P \sim 0.00009P$ para A_g en m^2 y P en kN

En la obtención de las expresiones anteriores, se puede observar la importante contribución del concreto a la resistencia de las columnas en compresión y, por tanto, la influencia de la calidad de este material en la determinación del tamaño de la sección; por otra parte, la utilización de las fórmulas anteriores como predimensión en los casos de normal ocurrencia resultará más o menos aproximada dependiendo del menor o mayor grado de la excentricidad de la carga respectivamente. Por consiguiente, la interpretación de los resultados debe hacerse con prudencia.

Carga axial y momento

En esta sección se enuncian las expresiones más usuales de capacidad a flexocompresión de columnas rectangulares sometidas a combinaciones de carga axial y momento de flexión indicando los requisitos de seguridad del Reglamento NSR-10, las posibilidades de diagramación en interacción compresión-flexión como ayuda en el diseño y el empleo de programas de computación con el mismo propósito.

A partir de la equivalencia entre carga excéntrica y carga axial y momento, figura 6.8.a, se define la frecuencia de su presentación en el diseño estructural y su permanente necesidad de solución.

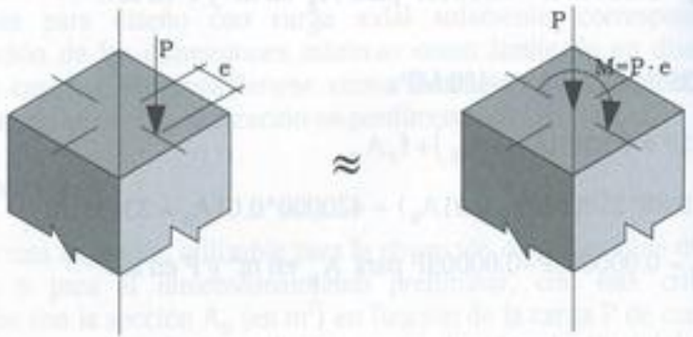


Figura 6.8.a

Teniendo en cuenta las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones y los requisitos contenidos en el Reglamento colombiano tales como que la máxima deformación unitaria en la fibra extrema en compresión del concreto debe suponerse igual a 0.003, que el esfuerzo de compresión en el concreto se supone de distribución rectangular con un valor uniforme de 0.85 f'_c sobre una zona equivalente de compresión limitada por los bordes de la sección transversal y por una línea recta paralela al eje neutro, localizada a una distancia $a = \beta_1 c$ de la fibra de máxima deformación en compresión y que el coeficiente β_1 debe tomarse como 0.85 para resistencias nominales de compresión del concreto de f'_c hasta 28.1 MPa, reduciéndose 0.05 por cada 7 MPa de resistencia por encima de 28.1 MPa, pero sin que pueda ser menor de 0.65, se pueden plantear los esfuerzos y fuerzas de la figura 6.8.b. De allí:

$$P_n = 0.85 f'_c * ab + A'_s f_y - A_s f_s$$

Para el caso de la falla porque el acero de tracción alcanza su límite elástico al tiempo que el concreto se rompe y el acero de compresión también llega a su límite elástico, se tendrá la carga nominal balanceada de falla.

$$P_{nb} = 0.85 f'_c * ab + f_y (A'_s - A_s)$$

Para esta condición llamada balanceada existe una excentricidad particular llamada e_b, y a partir de esta situación se presentan dos casos:

a) Para cargas $P_n > P_{nb}$ con excentricidades $e < e_b$, la sección estará controlada por la falla por compresión.

b) Para cargas $P_n < P_{nb}$ con excentricidades $e > e_b$, la sección estará controlada por la falla por tracción.

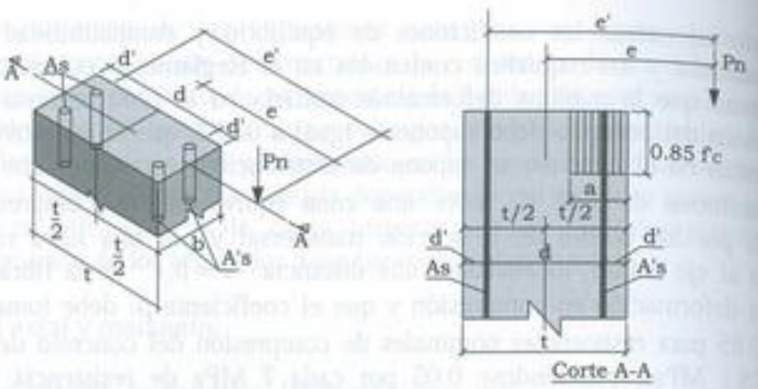


Figura 6.8.b

Para excentricidades grandes, la falla se inicia por la fluencia del acero seguida por el desplazamiento del eje neutro hacia la zona de compresiones hasta causar la falla del concreto; para excentricidades pequeñas, la falla es por compresión en el concreto aunque el acero esté lejos de su fluencia. Por tanto, existirá una excentricidad de la carga que producirá la falla simultánea por la fluencia del acero y la compresión en el concreto y a esta situación se la llama balanceada con la carga como P_{nb} y la excentricidad como e_b. Entonces, si la carga P_n es mayor que P_{nb} con excentricidad menor que e_b la falla será por compresión; si la carga P_n es menor que P_{nb} con excentricidad mayor que e_b, la falla será por tracción.

Para la carga balanceada que los limita, así como para los dos casos antes enunciados, se han deducido las siguientes expresiones:

a) La carga balanceada de diseño ϕP_{nb}, es decir, cuando la carga y su excentricidad producen la falla simultánea del acero a tracción, del concreto a compresión y de la armadura a compresión, se puede calcular usando la expresión:

$$\phi P_{nb} = \phi * 0.85 * \beta_1 * \frac{600}{600 + f_y} * f'_c bd, \qquad \text{para } f_y \text{ en MPa.}$$

Si $f'_c \leq 28.1$ MPa:

$$\phi P_{nb} = \phi * 0.7225 * \frac{600}{600 + f_y} * f'_c bd, \quad \text{en donde:}$$

ϕ = coeficiente de reducción de la capacidad de la sección.

b = ancho de la cara en compresión de un miembro sujeto a flexocompresión.

d = distancia de la fibra extrema en compresión al centroide del refuerzo en tensión.

b) Igualmente, de acuerdo con lo antes expresado, la capacidad o carga de diseño a la falla de una columna corta estará controlada por la tracción cuando ϕP_n sea menor que ϕP_{nb}, es decir, que e sea mayor que e_b, y estará controlada por la compresión cuando ϕP_n sea mayor que ϕP_{nb}, es decir, que e sea menor que e_b.

Por tanto, para la sección controlada por la tracción con refuerzo simétrico en las dos caras, cada una paralela al eje de flexión y todo el refuerzo en cada cara localizado a la misma distancia aproximada del eje de flexión, la capacidad o carga de diseño a la falla estará dada por:

$$\phi P_n = \phi \left[0.85 f'_c \, bd \left\{ 1 - \frac{e'}{d} - \frac{\rho t}{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{e'}{d}\right)^2 + \rho t \left[m\left(1 - \frac{d'}{d}\right) + \frac{e'}{d} \right]} \right\} \right]$$

en donde:

e' = excentricidad de la carga medida desde el centroide del refuerzo en tracción.

$$\rho_t = \frac{A_{st}}{A_g} = \frac{\text{área total del refuerzo}}{\text{área de la seccion}}$$

$$m = \frac{f_y}{0.85f'_c}$$

$$m' = m - 1$$

d' = distancia de la fibra extrema en compresión al centroide del refuerzo en compresión.

Igualmente, cuando la sección está controlada por la compresión con refuerzo simétrico en las dos caras, cada una paralela al eje de flexión y todo el refuerzo en cada cara localizado a la misma distancia aproximada del eje de flexión, la capacidad o carga de diseño a la falla estará dada por:

$$\phi P_n = \phi \left[\frac{A'_s f_y}{\frac{e}{d-d'} + 0.5} + \frac{bt * f'_c}{\frac{3te}{d^2} + 1.18} \right]$$

en donde A'_s = área del refuerzo en compresión y la misma nomenclatura utilizada en las expresiones anteriores.

La información anterior se visualiza más fácilmente si se coloca en un gráfico o diagrama de interacción, en donde en las ordenadas se representan las cargas axiales, en las abscisas los momentos, y se llama P_{no} la carga axial de falla que para diseño el Reglamento la limita a 0.80 o 0.85 de P_{no}, y M_{no} cuando la carga axial es cero; a este respecto el Reglamento colombiano especifica que "cuando los valores de la compresión axial sean bajos, el valor del coeficiente de reducción de resistencia ϕ puede aumentarse linealmente hasta 0.9 en la medida en que ϕP_n disminuya de $0.10f'_cA_g$ ó ϕP_{nb}, el menor de los dos, hasta cero". La parte de la curva entre a y b ó entre A y B corresponde a secciones controladas por la compresión; el punto b o B corresponde a la condición balanceada y la parte de la curva entre b y c o entre B y C corresponde a secciones controladas por la tracción.

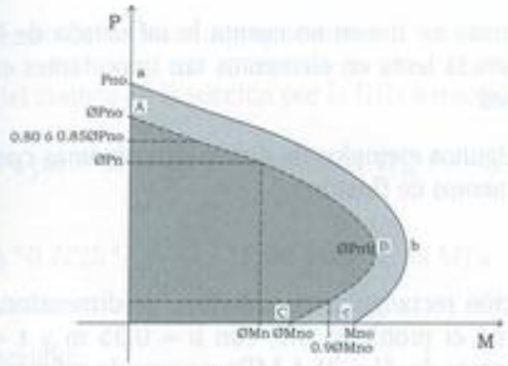


Figura 6.9

Por tanto, en el diseño de una sección cualquiera de columna de concreto reforzado, se puede establecer un diagrama de interacción calculando los puntos correspondientes a ϕP_{no}, ϕM_{no}, ϕP_{nb} y algunos puntos adicionales por encima y por debajo de ϕP_{nb} y de esta manera establecer el funcionamiento de dicha sección para diversas condiciones de cargas y momentos.

Basados en lo anteriormente expuesto se han elaborado numerosos gráficos de ayuda para el diseño, publicados entre otros por el Instituto Americano del Concreto. Adicionalmente, en la actualidad existen numerosos programas para uso en procesadores automáticos que facilitan el trabajo de diseño que en edificios con muchas secciones de columnas puede resultar muy laborioso.

Entre estos programas se destaca el elaborado por los ingenieros Edgar Ardila R. y Daniel Monroy C. denominado "UNCOL" como parte de su proyecto de grado "Análisis y diseño de columnas de concreto reforzado" presentado en la Universidad Nacional de Colombia en 1992. En el presente texto también utilizaremos el programa RCBE cuyo autor es el ingeniero colombiano Ricardo E. Barbosa.

Finalmente, y de acuerdo con lo expuesto por algunos autores, se recomienda un factor de seguridad para el diseño de columnas variable entre 2.5 y 3.0 de acuerdo al criterio del diseñador, que resulta superior al que se obtiene si se aplican los factores de carga del Capítulo B.2 del Reglamento colombiano, (1.2D + 1.6L), que obviamente, corresponden a valores

mínimos que además no tienen en cuenta la influencia de la retracción de fraguado y la fluencia lenta en elementos tan importantes en la estabilidad de las edificaciones.

A continuación algunos ejemplos de diseño de columnas cortas sometidas a carga axial y momentos de flexión.

Problema 6.2

Diseñar una sección rectangular de columna, predimensionada de acuerdo con lo expuesto en el problema 6.1, con b = 0.35 m y t = 0.45 m, si se construirá en concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero de refuerzo para f_y = 240 MPa y debe soportar las siguientes cargas y momentos:

Carga muerta:	PDL =	800.21 kN;	MDL =	39.58 kN·m
Carga viva:	PLL =	200.05 kN;	MLL =	9.89 kN·m
Total:	P	= 1000.26 kN	M	= 49.47 kN·m

1. Coeficiente de carga y factor de seguridad

   De acuerdo con lo expresado, se puede usar un factor de seguridad de 2.5 para la carga muerta y un factor de seguridad de 3.0 para la carga viva, los cuales implican los siguientes coeficientes de carga:

Carga muerta:	$\phi P_n = P_u = 1.625*800.21$ =	1300.34 kN
Carga viva:	$\phi P_n = P_u = 1.95*200.05$ =	390.10 kN
	$\phi P_n = P_u = U*1000.26$ =	1690.44 kN

   Por tanto, el coeficiente de carga y el factor de seguridad ponderados resultantes serán:

   Coeficiente de carga: $U = \dfrac{1690.44}{1000.26} = 1.69$

   Factor de seguridad: $F.\ de\ S. = \dfrac{1.69}{0.65} = 2.6$

que está dentro de los límites propuestos.

2. Chequeo del control de la sección por la falla a tracción o a compresión

   Se obtiene a partir de la carga balanceada ϕP_{nb}:

$$\phi P_{nb} = \phi * 0.7225 * \frac{600}{600 + f_y} * f'_c\, bd \quad \text{para } f_y \text{ en MPa.}$$

   Remplazando:

$$\phi P_{nb} = 0.65 * 0.7225 * \frac{600}{600 + 240} * 21100 * 0.35 * 0.38$$

$$\therefore\ \phi P_{nb} = 941.36\ \text{Kn}$$

   de donde, si $\phi P_n = P_u > \phi P_{nb}$, la capacidad o carga de diseño a la falla de la columna estará controlada por la compresión.

3. Solución por la ecuación

$$\phi P_n = P_u = \phi \left[\frac{A'_s f_y}{\dfrac{e}{d - d'} + 0.5} + \frac{bt * f'_c}{\dfrac{3te}{d^2} + 1.18} \right]$$

   en donde: $e = \dfrac{49.47\ \text{kN}\cdot\text{m}}{1000.26\ \text{kN}} = 0.05\ \text{m}$

d	= 0.38 m;	d'	= 0.07 m
b	= 0.35 m;	t	= 0.45 m

$$\therefore\ 1690.44 = 0.65*\left[\frac{A_s'*240000}{\frac{0.05}{0.38-0.07}+0.5}+\frac{0.35*0.45*21100}{\frac{3*0.45*0.05}{0.38^2}+1.18}\right]$$

$\therefore\ A_s' = 0.001595\ m^2$; A_{st} : es usual considerarla como $2A_s'$

$\therefore\ A_{st} = 2A_s' = 2*0.001595 = 0.003190\ m^2$ $(3190\ mm^2)$

Armadura: $4\phi 1" + 4\phi \frac{7}{8}"$ $(A_{st} = 0.003588\ m^2)$

$$\therefore\ \rho_t = \frac{0.003588}{0.35*0.45} = 0.0228$$

Se concluye entonces que utilizando los criterios para una posible predimensión preliminar expuestos en el problema 6.1, y no obstante usar ahora un factor de seguridad inferior al empleado en la obtención de las dimensiones, resulta una sección insuficiente para las condiciones esperadas cuando se diseña para carga axial y momento, confirmándose la recomendación en el sentido de que su utilización como predimensión para los casos de normal ocurrencia no es la más apropiada.

4. Utilizando para la solución del presente problema gráficos como los que se mencionaron, tales como los contenidos en la publicación Guide for Ultimate Strenght Design for Reinforced Concrete por C. S. Whitney y E. Cohen, resulta:

Se identifica el gráfico por utilizar a partir del valor:

$$\frac{d}{t} = \frac{0.38}{0.45} = 0.84$$ que se aproxima al valor inferior utilizando d/t=0.80

Se entra al gráfico con los valores e/t = 0.05/0.45 = 0.111

$$K = \frac{P_n}{\phi f_c' bt} = \frac{\phi P_n}{\phi f_c' bt} = \frac{P_n}{f_c' bt}$$

$$K = \frac{1690.44}{0.65*21100*0.35*0.45} = 0.7826$$ y se obtiene:

$\rho_t m = 0.30$ en donde $m = \frac{f_y}{0.85f_c'} = \frac{240000}{0.85*21100} = 13.38$

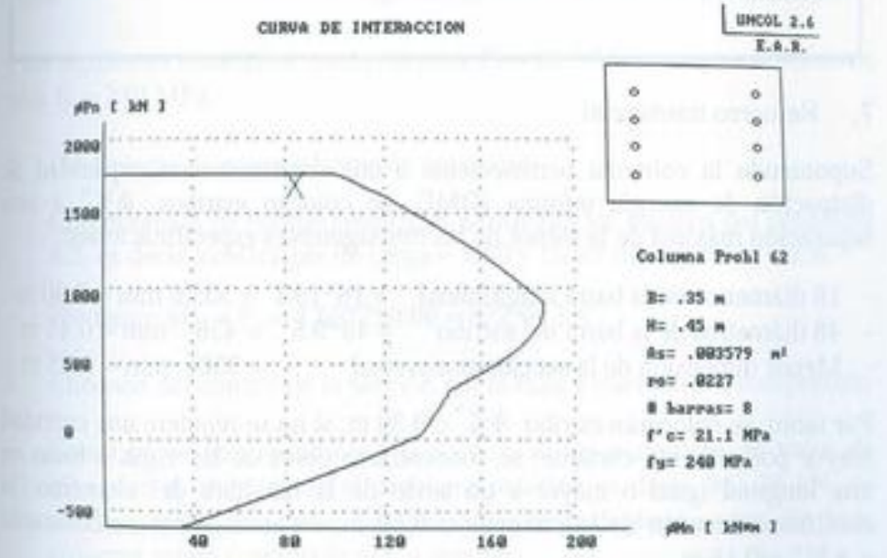
$\therefore \rho_t = 0.0224$ y $A_{st} = 0.0224*0.35*0.45 = 0.003528\ m^2$

Armadura: $4\phi 1" + 4\phi \frac{7}{8}"$ $(A_{st} = 0.003588\ m^2)$

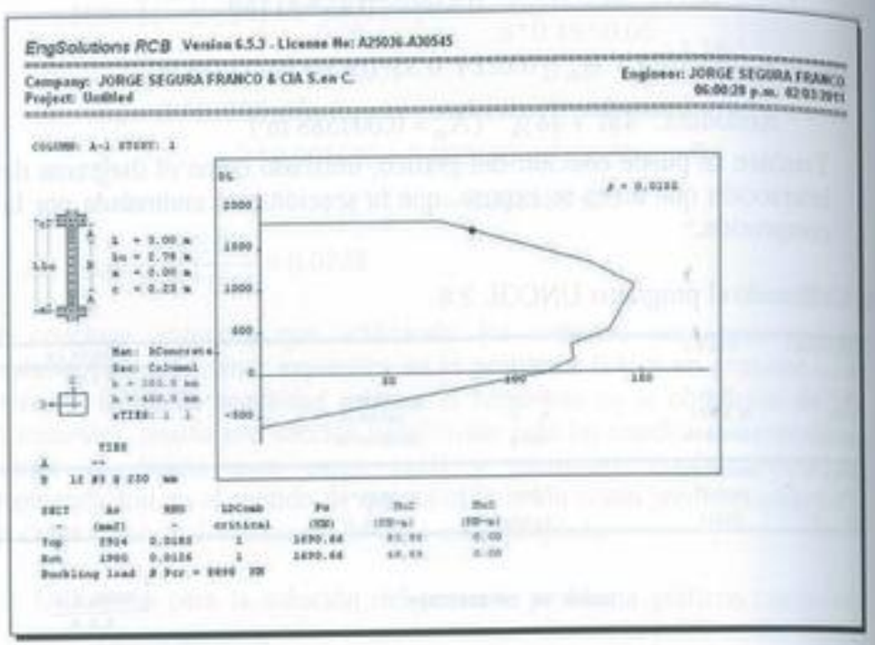
También se puede concluir del gráfico, utilizado como el diagrama de interacción que antes se expuso, que la sección está controlada por la compresión.

5. Utilizando el programa UNCOL 2.6

COLUMNA	Prob 6-2				UNCOL 2.6 E.A.R
B =	.35 m	H =	.45 m	d' = .07 m	
f'c =	21.1 MPa	fy =	240 MPa		
Pu =	1690.44 kN	Mux =	83.60 kN*m		
Pmáx =	1690.44 kN				
φPn =	1690 kN	φMn =	82.88 kN*m		
ro =	.01814	As total =	.002895 m²		



6. Utilizando el programa RCBE 6.5.3



7. Refuerzo transversal

Suponiendo la columna perteneciente a una estructura con capacidad de disipación de energía mínima (DMI), se colocan estribos ϕ3/8" a una separación máxima de la menor de las tres siguientes especificaciones:

- 16 diámetros de la barra longitudinal = 16*19.1 = 305.6 mm ~ 0.30 m
- 48 diámetros de la barra del estribo = 48*9.5 = 456 mm ~ 0.45 m
- Menor dimensión de la sección transversal = 350 mm ~ 0.35 m

Por tanto, se colocarán estribo ϕ3/8" c/0.30 m, si no se requiere una cantidad mayor por esfuerzo cortante; se concentrarán cerca de las vigas o losas en una longitud igual o mayor a un sexto de la luz libre del elemento, la máxima dimensión de la columna o 0.50 m; en estas zonas se colocarán ε ϕ3/8" c/0.15 m.

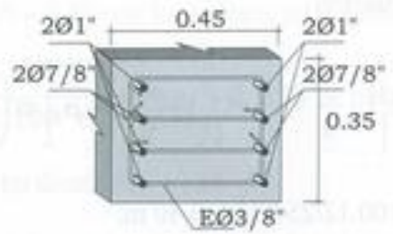


Figura 6.10

Problema 6.3

Diseñar una sección rectangular de columna predimensionada para b = 0.35 m y t = 0.45 m, y que debe soportar las siguientes cargas y momentos distribuidos como sigue:

Carga muerta:	PDL =	200.05 kN	MDL =	80.10 kN·m
Carga viva:	PLL =	50.01 kN	MLL =	20.02 kN·m
Total:	P =	250.06 kN	M =	100.12 kN·m

y los siguientes materiales: concreto para f'_c = 21.1 MPa y acero de refuerzo para f_y = 240 MPa.

1. Coeficiente de carga y factor de seguridad

   Con el objeto de cotejar resultados se utilizan los mismos del problema 6.2, es decir, coeficiente de carga = 1.69 y factor de seguridad = 2.6.

   Por tanto, $\phi P_n = P_u = 1.69*250.06 = 422.60$ kN.

2. Chequeo del control de la sección por la falla a tracción o a compresión

   Como no se han modificado la sección ni los materiales, el valor de ϕP_{nb} será el obtenido en el problema anterior, es decir, 941.36 kN, de donde, si $\phi P_n = P_u < \phi P_{nb}$, la capacidad o carga de diseño a la falla de la columna estará controlada por la tensión.

3. Solución por la ecuación

$$\phi P_n = \phi\left[0.85 f'_c bd\left\{1-\frac{e'}{d}-\frac{\rho_t}{2}+\sqrt{\left(1-\frac{e'}{d}\right)^2+\rho_t\left[m'\left(1-\frac{d'}{d}\right)+\frac{e'}{d}\right]}\right\}\right]$$

en donde: $e = 100.12/250.06 = 0.40$ m;

$e' = e + (d - d')/2 = 0.40 + 0.31/2 = 0.555$ m

$d = 0.38$ m; $d' = 0.07$ m

$$m = \frac{f_y}{0.85 f'_c} = \frac{240}{0.85 * 21.1} = 13.38; \quad m' = m - 1 = 12.38$$

Remplazando:

$$422.60 = 0.65 * 0.85 * 21100 * 0.35 * 0.38 * \left[\left\{1-\frac{0.555}{0.38}-\frac{\rho_t}{2}+\sqrt{\left(1-\frac{0.555}{0.38}\right)^2+\rho_t * \left[12.38\left(1-\frac{0.07}{0.38}\right)+\frac{0.555}{0.38}\right]}\right\}\right]$$

$\therefore \quad \rho_t = 0.02984, \; A_{st} = 0.02984 * 0.35 * 0.45 = 0.004700 \text{ m}^2$

Armadura: $10\,\phi\,1"$ ($A_{st} = 0.00510$ m^2) $\therefore \quad \rho_t = \dfrac{0.00510}{0.35 * 0.45} = 0.03238$

Para este caso de gran excentricidad con una sección de columna $A_g = 0.00063P$, la cuantía del refuerzo longitudinal resulta bastante más alta del 1%, confirmándose las reservas sobre los criterios de predimensión del problema 6.1, especialmente a medida que aumenta la excentricidad.

4. Solución por los gráficos de la Guide for Ultimate Strenght Design for Reinforced Concrete por C. S. Whitney y E. Cohen

En el gráfico d/t = 0.80 con los valores e/t = 0.40/0.45 = 0.89 y

$$K = \frac{422.60}{0.65 * 21100 * 0.35 * 0.45} = 0.1956$$ se obtiene:

$\rho_t m = 0.36$ en donde m= 13.38

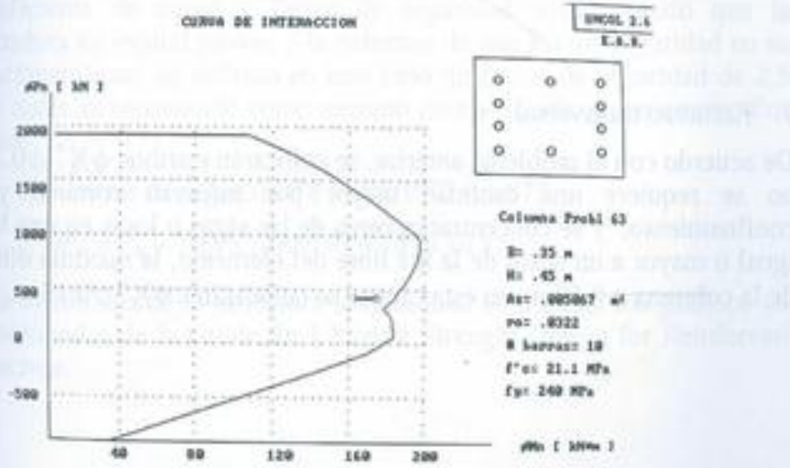
$\therefore \quad \rho_t = 0.0269$ y $A_{st} = 0.0269 * 0.35 * 0.45 = 0.004237$ m^2

Armadura: $10\,\phi\,1"$ ($A_{st} = 0.00510$ m^2) – aproximación por exceso –

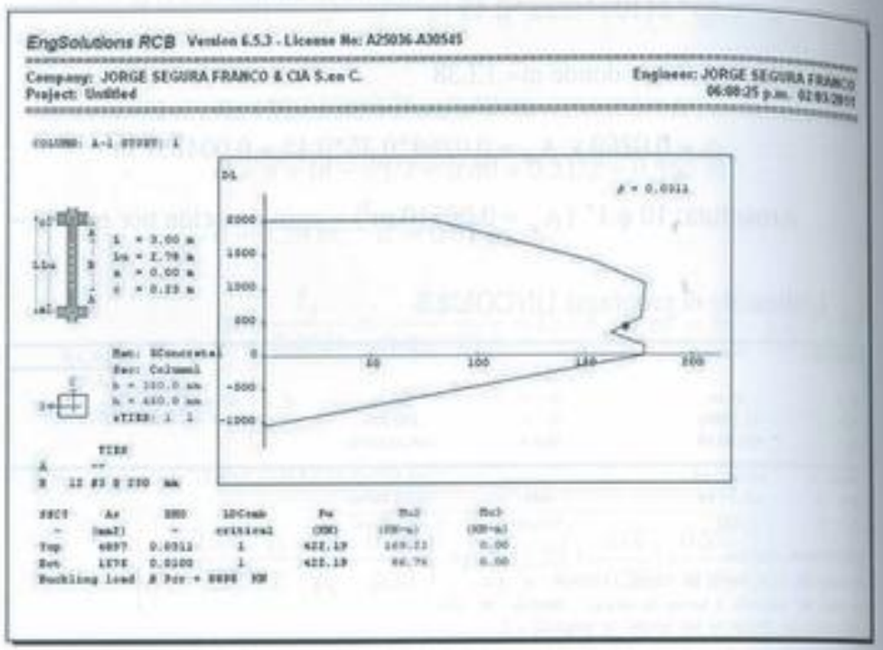
5. Utilizando el programa UNCOL 2.6

COLUMNA	Prob 6-3				UNCOL 2.6 E.A.R
b =	.35 m	H =	.45 m	d' =	.07 m
f'c =	21.1 MPa	fy =	240 MPa		
Pu =	422,60 kN	Mux =	169,20 kN*m		
Pnbe =	1923,22 kN				
φPr =	422,77 kN	φMn =	169.5 kN*m		
ro =	.032	As total =	.005045 m²		

SUGERENCIA : Coloque
En cada by = 3 barras de aprox/. .000504 m² c/u
En cada hx adicione 2 barras de aprox/. .000504 m² c/u
Concentración (Refuerzo por unidad de longitud) = 1



6. Utilizando el programa RCBE 6.5.3



7. Refuerzo transversal

De acuerdo con el problema anterior, se colocarán estribos ϕ⅜" c/0.35 m, si no se requiere una cantidad mayor por esfuerzo cortante y/o por confinamiento, y se concentrarán cerca de las vigas o losas en una longitud igual o mayor a un sexto de la luz libre del elemento, la máxima dimensión de la columna o 0.50 m; en estas zonas se colocarán ε ϕ⅜" c/0.15 m.

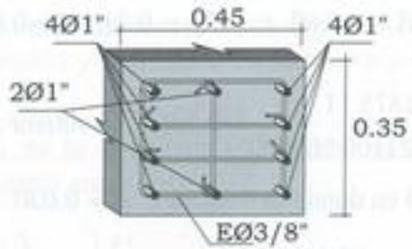


Figura 6.11

Problema 6.4

Diseñar una columna circular con armadura longitudinal en barra redonda y transversal primero en espiral y luego en estribos, si fue predimensionada para un diámetro D = 0.45 m cuando se considera sometida a una carga P de 1000.10 kN y a un momento de 49.95 kN-m, utilizando los siguientes materiales: concreto para f'_c = 21.1 MPa y acero de refuerzo para f_y = 240 MPa.

Solución

Primero se diseña para armadura transversal en espiral y luego para estribos.

a) Armadura longitudinal en barra redonda y transversal en espiral

1. Coeficiente de carga y factor de seguridad: considerando que la armadura en espiral provee a la columna de una mayor seguridad en su funcionamiento, se utilizan en este caso un factor de seguridad de 2.5 que antes se recomendó como mínimo para el diseño de columnas. Por tanto:

   U = Factor de seguridad*ϕ = 2.5*0.75 = 1.875

   $\therefore \phi P_n = P_u = 1.875*1000.10 = 1875.19$ kN

2. Para el cálculo de la armadura longitudinal se utilizan los gráficos ya mencionados de la Guide for Ultimate Strenght Design for Reinforced Concrete.

En el gráfico d/D = 0.60 < (d/D = 0.31/0.45=0.69) con los valores e/D = 0.111 y

$$K = \frac{1875.11}{0.75 * 21100 * 0.45^2} = 0.5852$$, se obtiene:

$\rho_t m = 0.40$ en donde $m = 13.38 \therefore \rho_t = 0.030$

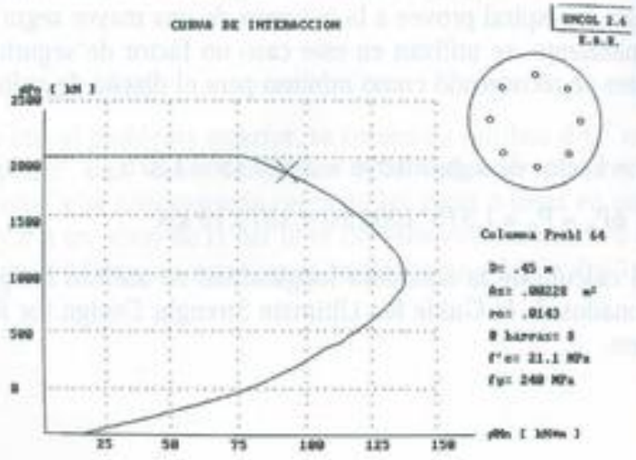
$$A_{st} = 0.030 * \frac{\pi * 0.45^2}{4} = 0.004769 \text{ m}^2$$

Armadura: 13 ϕ 7/8" ($A_{st} = 0.005031$ m^2)

Se destaca que para cargas iguales y sección relativamente semejante, no obstante que se ha usado un factor de seguridad inferior, la armadura resulta superior a la calculada para la sección del problema 6.2.

3. Utilizando el programa UNCOL 2.6

COLUMNA 6-4 ESP				UNCOL 2.62 E.A.R99
Diametro =	.45 m	d' =	.07 m	
f'c =	21.1 MPa	fy =	240 MPa	
Pu =	1875.19 kN	Mux =	93.66 kN*m	
Pmax =	2032.64kN			
ϕPn =	1875kN	ϕMn =	94.13 kN*m	
ro =	.0152	As total =	.002411 m²	



En este caso es notoria la diferencia en el resultado del UNCOL 2.6 en el tratamiento de la sección y materiales con respecto a otros procedimientos aproximados.

4. Para el diseño de la armadura transversal en espiral, se utiliza la expresión de cuantía antes vista

$$\rho_s = 0.45\left\{\frac{A_g}{A_c} - 1\right\}\frac{f'_c}{f_y}$$

$$\rho_s = 0.45\left\{\frac{0.45^2}{0.37^2} - 1\right\} * \frac{21.1}{240} = 0.018958$$

Como $\rho_s = \frac{V_e}{V_c}$, en donde

$V_e = A_s \pi D_c * \frac{1000}{s}$, que para ϕ 3/8" resulta:

$$V_e = 71 * \pi * 370 * \frac{1000}{s} \quad \text{y}$$

$$V_c = \frac{\pi D_c^2}{4} * 1000 = \frac{\pi * 370^2}{4} * 1000 = 107521260 \text{ mm}^3$$

$\therefore$ s = 40.49 mm, que se aproxima a 0.04 m

Armadura transversal: espiral ϕ 3/8" con paso de 0.04 m.

b. Armadura longitudinal en barra redonda y transversal en estribos

1. Coeficiente de carga y factor de seguridad: se utiliza el mismo factor de seguridad del problema 6.2 con el propósito de comparar el diseño de columnas rectangulares y circulares con armadura transversal en estribos.

Coeficiente de carga: U = 1.69; Factor de seguridad = 2.6

$\therefore \phi P_n = P_u = 1.69 * 1000.10 = 1690.17$ kN

2. Para el cálculo de la armadura longitudinal utilizamos los gráficos ya mencionados de la Guide for Ultimate Strenght Design for Reinforced Concrete.

   En el gráfico d/D = 0.70 < (d/D = 0.73) con los valores e/D = 0.11 y

   $$K = \frac{1690.17}{0.65 * 21100 * 0.45^2} = 0.6086$$, se obtiene:

   $\rho_t m = 0.40$ en donde m = 13.38 $\quad \therefore \quad \rho_t = 0.030$

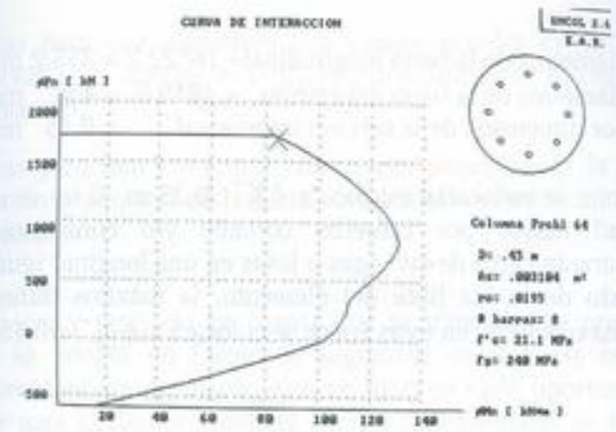
   $$A_{st} = 0.030 * \frac{\pi * 0.45^2}{4} = 0.004771 \text{ m}^2$$

   Armadura: 13 ϕ 7/8" ($A_{st} = 0.005031$ m^2)

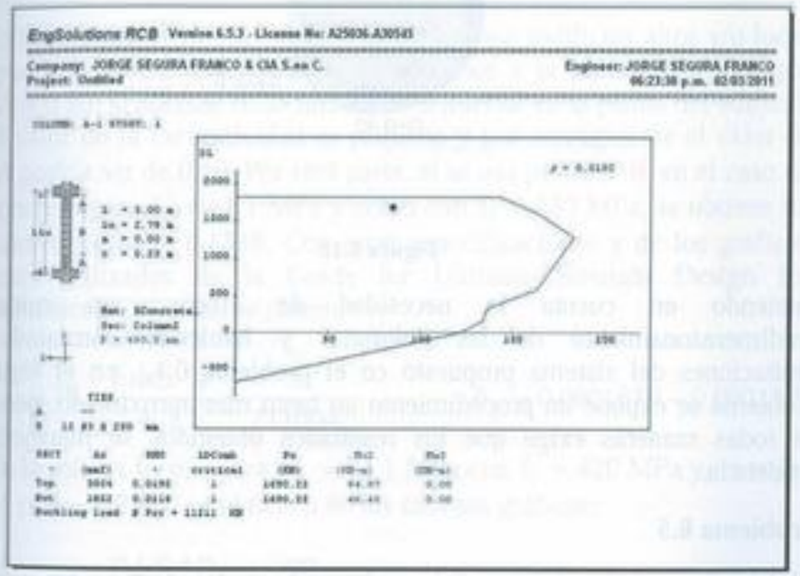
   También en este caso cabe anotar que para cargas aproximadamente iguales, áreas semejantes y un factor de seguridad similar, la armadura para columna circular resulta muy superior a la calculada para una sección rectangular en el problema 6.2.

3. Utilizando el programa UNCOL 2.6

COLUMNA	6-4 EST			UNCOL 2.6 E.A.R.
Diametro =	.45 m	d' =	.07 m	
f'c =	21.1 MPa	fy =	240 MPa	
Pu =	1690.17 kN	Mux =	84.42 kN*m	
Pmáx =	1720.12 kN			
ϕPn =	1690.26 kN	ϕMn =	84.84 kN*m	
ro =	.0191	As total =	.003044 m^2	



3. Utilizando el programa RCBE 6.5.3



5. Armadura transversal: suponiendo la columna igualmente perteneciente a una estructura con capacidad de disipación de energía mínima (DMI), se colocan estribos $\phi \frac{3}{8}$" a una separación máxima igual a la menor de las tres siguientes especificaciones:

- 16 diámetros de la barra longitudinal= 16*22.2 = 355.2 mm ~ 0.35 m
- 48 diámetros de la barra del estribo = 48*9.5 = 456 mm ~ 0.45 m
- Menor dimensión de la sección transversal = 0.45 m

Por tanto, se colocarán estribos ε ϕ3/8" c/0.35 m, si no se requiere una cantidad mayor por esfuerzo cortante y/o confinamiento, y se concentrarán cerca de las vigas o losas en una longitud igual o mayor a un sexto de la luz libre del elemento, la máxima dimensión de la columna o 0.50 m; en estas zonas se colocará ε ϕ3/8" c/0.15 m.

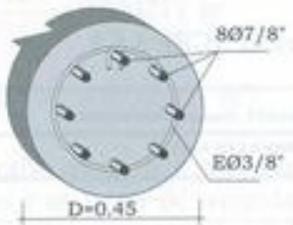


Figura 6.12

Teniendo en cuenta la necesidad de efectuar un cuidadoso predimensionamiento de las columnas y habiendo constatado las limitaciones del sistema propuesto en el problema 6.1, en el siguiente problema se expone un procedimiento un tanto más aproximado, pero que de todas maneras exige que los resultados obtenidos se manejen con prudencia.

Problema 6.5

Obtener una expresión para el predimensionamiento de columnas con armadura longitudinal del 1% de la sección, concreto para f'_c = 21.1 MPa y refuerzos para f_y = 240 y 420 MPa, para las siguientes condiciones de estructura obtenidas a partir del anteproyecto arquitectónico:

1. Columnas para una estructura con cargas grandes en la base y de localización en el interior de la planta estructural del edificio, a nivel de la cimentación.

2. Columnas para una estructura con cargas pequeñas en la base y de localización perimetral en la planta estructural del edificio, a nivel del tramo más alto.

Solución

En ambos casos, y teniendo en cuenta que se trata de una predimensión aproximada, se adopta un factor de seguridad de 3 y las condiciones especiales mencionadas de diseño que se fijan en cada oportunidad; esto significa que para cualquier columna por predimensionarse se deben fijar estas condiciones de acuerdo al proyecto y a la localización de la columna en el mismo, así:

1. Si la columna tiene cargas grandes en la base (edificios altos y/o luces grandes) deberá tener valores d/t cercanos a la unidad, por ejemplo d/t = 0.95; si además su localización es interior en la planta del edificio, el valor de la excentricidad es pequeño y por consiguiente el valor de e/t podría ser de 0.10. Por otra parte, si se usa ρ_t = 0.010, en el caso de concreto para f'_c = 21.1 MPa y acero con f_y = 240 MPa, se obtiene un valor de $\rho_t m$ = 0.1338. Con estas especificaciones y de los gráficos antes utilizados de la Guide for Ultimate Strenght Design for Reinforced Concrete, se obtiene:

$$K = 0.76 = \frac{F.deS.*P}{A_g f'_c} = \frac{3P}{21100A_g} \quad \therefore \quad A_g = 0.000187P \sim 0.00019P$$

En la misma forma, para f'_c = 21.1 MPa con f_y = 420 MPa y un valor de $\rho_t m$ = 0.2342, se obtienen de los mismos gráficos:

$$K = 0.83 = \frac{F.deS.*P}{A_g f'_c} = \frac{3P}{21100A_g} \quad \therefore \quad A_g = 0.000171P \sim 0.00018P$$

Así que, para una columna cuadrada de carga probable 5000 kN, las dimensiones preliminares de su sección serán, en ambos casos, de 0.95 x 0.95 m.

2. Si la columna tiene cargas pequeñas, en el tramo más alto el valor d/t se alejará de la unidad, por ejemplo d/t = 0.80; y si además su localización es perimetral en la planta del edificio el valor de la excentricidad será grande y por consiguiente el valor de e/t podría ser de 0.5. Usando ρ_t = 0.010 en el caso de concreto para f'_c = 21.1 MPa y acero para f_y = 240 MPa se obtiene un valor de $\rho_t m$ = 0.1338 para el cual :

$$K = 0.26 = \frac{F.de\,S.\,*\,P}{A_g f'_c} = \frac{3P}{21100A_g} \quad \therefore \quad A_g = 0.000547P \sim 0.00055P$$

En la misma forma, para f'_c = 21.1 MPa, acero para f_y = 420 MP y $\rho_t m$ = 0.2342 se obtiene:

$$K = 0.33 = \frac{F.de\,S.\,*\,P}{A_g f'_c} = \frac{3P}{21100A_g} \quad \therefore \quad A_g = 0.000431P \sim 0.00044P$$

De manera que para una columna cuadrada de carga probable 200 kN las dimensiones preliminares de su sección serán, en ambos casos, de 0.30 x 0.30 m.

De todas maneras y aunque en algunos casos es posible utilizar los dos tipos de cargas para el predimensionamiento del primero y último tramo, interpolando los intermedios, se recomienda especial prudencia en la adopción de las dimensiones de las columnas a partir de éste o de cualquier otro procedimiento porque en la mayoría de los casos sólo se obtienen resultados aproximados.

Por tanto, la validez de este procedimiento sólo llega hasta las dimensiones preliminares que permitan analizar la estructura y obtener las solicitaciones reales a partir de las cuales es posible, utilizando un procedimiento apropiado como un programa para procesador, llegar a las soluciones esperadas, con distribuciones del refuerzo en la sección que estén de

acuerdo con las especificaciones discutidas al comienzo del presente capítulo.

Efectos de esbeltez en elementos a compresión

A continuación se transcriben, adicionando comentarios, algunos de los requerimientos que trae el Reglamento colombiano en su sección C.10.10

Se permite ignorar los efectos de esbeltez en los siguientes casos:

a) En elementos sometidos a compresión no arriostrados contra desplazamientos laterales cuando:

$$\frac{k\ell_u}{r} \le 22$$

b) En elementos a compresión arriostrados contra desplazamientos laterales cuando:

$$\frac{k\ell_u}{r} \le 34 - 12\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \le 40$$

donde el término M_1/M_2 es positivo si la columna está deflectada en curvatura simple y negativo si el elemento tiene curvatura doble. Adicionalmente, M_1/M_2 no debe tomarse menor de -0.5.

ℓ_u debe tomarse como la distancia libre entre losas de piso, vigas u otros elementos capaces de proporcionar apoyo lateral en la dirección considerada. Cuando existan capiteles o cartelas en las columnas, ℓ_u debe medirse hasta el extremo inferior del capitel o la cartela en el plano considerado.

r, radio de giro, se puede tomar como 0.3 veces la dimensión total de la sección en la dirección en la cual se está considerando la estabilidad para el caso de elementos rectangulares y 0.25 veces el diámetro para elementos circulares en compresión.

k, factor de longitud efectiva, se puede estimar a partir de los ábacos de alineamiento de Jackson y Moreland (figura CR.10.10.1 del Reglamento colombiano) que permiten la determinación grafica de k para una columna

de sección transversal constante en un pórtico con varios vanos. Como aproximación se pude tomar como la unidad.

El diseño de los elementos a compresión (columnas y muros), las vigas que le dan soporte lateral y los otros elementos de soporte, cuando los efectos de esbeltez no son ignorados, debe hacerse utilizando la fuerza y los momentos mayoradas determinados mediante un análisis de segundo orden de la estructura. El análisis de segundo orden debe tener en cuenta la influencia de la no linealidad de los materiales, la fisuración de los elementos, la curvatura del elemento, las derivas de la estructura, los efectos de duración de las cargas, la retracción de fraguado y el flujo plástico del concreto y la interacción de la estructura con la cimentación sobre la cual se apoya.

Se permite usar las siguientes propiedades para los elementos de la estructura:

a) Modulo de elasticidad $E_c = 4700\sqrt{f'_c}$ (seccion C.8.5.1)

b) Momento de inercia, I:

Elementos en compresión:

Columnas	$0.70I_g$
Muros no agrietados	$0.70I_g$
agrietados	$0.35I_g$

Elementos a flexión:

Vigas	$0.35I_g$
Placas planas y losas planas	$0.25I_g$

c) Area $1.0A_g$

El Reglamento presenta una alternativa, a elección del diseñador, en la sección C.10.10.4.1.

Si las dimensiones de las secciones de los elementos utilizados en el análisis tienen variaciones mayores del 10% con respecto a las dimensiones que se muestran en los planos, el análisis debe repetirse.

Por lo tanto, al diseñar los elementos sometidos a compresión por el procedimiento descrito, los efectos de esbeltez en los sistemas a compresión quedan igualmente evaluados. Sin embargo, el Reglamento acepta, como alternativa, utilizar para esta evaluación, el procedimiento aproximado denominado "de magnificación de momentos".

Procedimiento de magnificación de momentos

Este procedimiento se basa en la designación de las columnas y pisos en una estructura como haciendo parte de estructuras con desplazamientos laterales (no arriostradas) o sin desplazamiento lateral (arriostradas).

Se permite suponer como arriostrado (sin desplazamiento lateral) a un piso de una estructura si

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_{us} \ell_c} \leq 0.05$$

en donde:

$\sum P_u$ = carga vertical mayorada en el piso bajo consideración.

V_{us} = cortante horizontal mayorada del piso.

Δ_o = deformación lateral relativa (derivas de primer orden entre la parte superior e inferior del piso debida a V_{us}).

ℓ_c = longitud del elemento en compresión en un pórtico, medido centro a centro de los nudos.

Procedimiento de magnificación de momentos. Estructura sin desplazamiento lateral

Los elementos a compresión deben diseñarse para la fuerza axial mayorada P_u y para el momento mayorado amplificada M_c así:

$$M_c = \delta M_2 \qquad \text{donde}$$

$$\delta = \frac{C_m}{1-\frac{P_u}{0.75P_c}} \geq 1.0 \qquad \text{y}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2}$$

EI debe tomarse como:

$$EI = \frac{0.2E_cI_g + E_sI_{se}}{(1+\beta_{dns})} \qquad \text{ó}$$

$$EI = \frac{0.4E_cI_g}{(1+\beta_{dns})}$$

El termino β_{dns} es la relación entre la máxima carga axial sostenida mayorada dentro de un piso y la máxima carga axial mayorada asociada con las misma combinación de carga, pero no debe ser mayor de 1.0. En un proceso de simplificación dice el Reglamento colombiano que se puede suponer $\beta_{dns} = 0.6$ y en este caso EI en la última ecuación queda como:

$$EI = 0.25E_cI_g$$

Como se expreso antes el valor de k para la longitud efectiva se puede considerar como 1.0

Para elementos sin cargas transversales entre los apoyos C_m debe considerarse como

$$C_m = 0.6 + 0.4\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \geq 0.4$$

Donde el término M_1/M_2 es positivo si la columna está deflectada en curvatura simple y negativo si el elemento tiene curvatura doble. Para elementos con carga transversales entre los apoyos, C_m debe considerarse como 1.0

El momento mayorado M_2, en la ecuación $M_c = \delta M_2$ no debe ser menor de:

$$M_{2,\,min} = P_u(15 + 0.03h)$$

en cada eje separadamente, donde 15 y h están en mm.

Procedimiento de magnificación de momentos. Estructura con desplazamiento lateral

Los momentos M_1 y M_2 en los extremos de un elemento individual a compresión deben tomarse como:

$$M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s}$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s}$$

en donde:

M_{1ns} y M_{2ns} : son los momentos mayorados en los extremos del elemento en compresión en los cuales actúan M_1 y M_2 , debido a cargas que no causan un desplazamiento lateral apreciable, calculados por medio de un análisis estructural elástico de primer orden.

M_{1s} y M_{2s} : son los momentos mayorados en los extremos de los elementos en compresión en los cuales actúan M_1 y M_2 , debidos a cargas que causan un desplazamiento lateral apreciable, calculados por medio de un análisis estructural elástico de primer orden.

M_1: es el menor momento mayorado de uno de los extremos de un elemento en compresión, el cual se toma como positivo si el elemento presenta curvatura simple y negativo si tiene curvatura doble.

M_2: es el mayor momento mayorado en los extremos de un elemento en compresión. El valor de M_2 es siempre positivo.

δ_s : factor de magnificación del momento, debe calcularse como

$$\delta_s = \frac{1}{1-Q} \geq 1.0$$

y es el factor de amplificación del momento en pórticos no arriostrados contra desplazamiento lateral para tener en cuenta el desplazamiento lateral causado por las cargas gravitacionales y laterales. Si el valor calculado excede de 1.5 el δ_s debe calcularse usando el análisis elástico de segundo orden ó

$$\delta_s = \frac{1}{1-\frac{\sum P_u}{0.75\sum P_c}} \geq 1.0$$

en donde:

$\sum P_u$ = es la sumatoria de todas las cargas verticales mayoradas en un piso.

$\sum P_c$ = es la sumatoria de todas las cargas críticas de pandeo de las columnas que resisten el desplazamiento lateral de un piso.

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación de algunos de los conceptos enunciados arriba.

Problema 6.6

En una estructura, con capacidad moderada de disipación de energía (DMO), para estacionamiento de automóviles en dos niveles que se construirá en losa aligerada en dos direcciones soportada en columnas y con capiteles (reticular celulado), con sistemas de pórticos establecidos en los

cinco ejes estructurales en los dos sentidos (A-B-C-D-E y 1-2-3-4-5) y luces iguales en cada dirección de 10 y 9 metros respectivamente, diseñar, utilizando concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero de alta resistencia para f_y = 420 MPa en diámetros de 3/8" a 1", las columnas iguales B2, B4, D2 y D4 en el tramo de la cimentación al segundo piso, a partir de los datos especificados en cada etapa y que se obtuvieron del análisis estructural correspondiente.

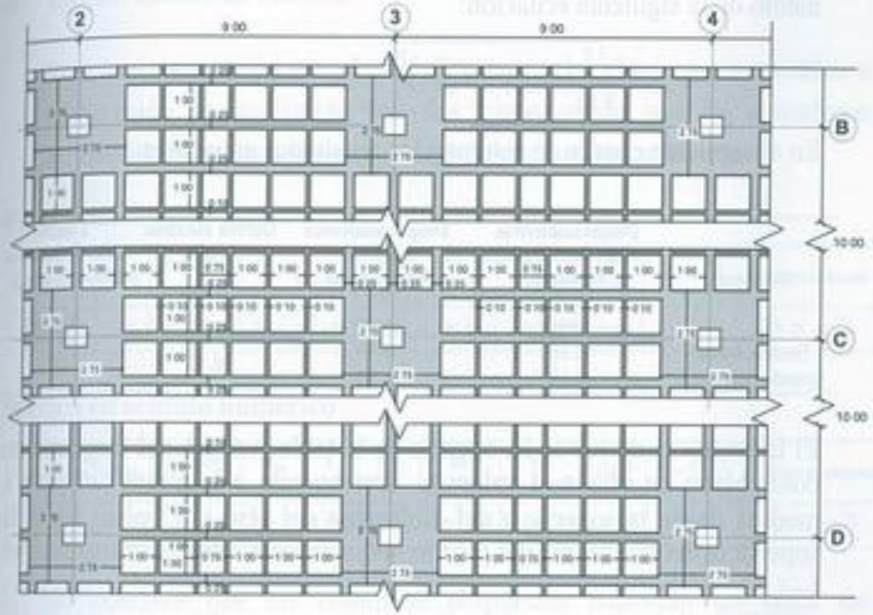


Figura 6.13

Solución

1) Desplazamientos horizontales, deriva de diseño y límite de la deriva.

Aunque estrictamente considerado, el tema de la deriva no es indispensable en el diseño de las columnas propuestas, se incluye aquí porque su estudio, además de ser una exigencia del Reglamento colombiano en cualquier desarrollo estructural, se considera asociado con los efectos del sismo respecto de la deformación inelástica de los elementos, la estabilidad global de la estructura y el daño de los

elementos no estructurales tales como particiones, enchapados, instalaciones, etc.

La deriva máxima en cualquier punto del piso i, se obtiene como la diferencia entre los desplazamientos horizontales totales máximos del punto en el piso i y los desplazamientos horizontales totales máximos de un punto localizado en el mismo eje vertical en el piso i – 1, por medio de la siguiente ecuación:

$$\Delta_{i\,max} = \sqrt{\sum_{j=1}^{2}\left(\delta^{i}_{total\,j} - \delta^{i-1}_{total\,j}\right)^2}$$

En el siguiente cuadro se resumen los resultados anteriores:

Pórticos	Desplazamientos totales horizontales elásticos (mm)	Desplazamientos relativos horizontales (mm)	Deriva máxima Δi máx (mm)	Límite deriva máxima 1% - ($0.01h_{pi}$) (mm)
Sentido literal	6.16	6.16	10.25	40
Sentido numérico	8.19	8.19		

El límite de la deriva se ha tomado de la tabla A.6.4-1 del Reglamento colombiano en donde el valor h_{pi} corresponde a la altura del piso i, medida desde la superficie del diafragma del piso i (2° piso) hasta la superficie del diafragma del piso inmediatamente inferior (cimentación) i –1.

2) Indice de estabilidad

Se calcula por la expresión:

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_{us}\ell_c} \le 0.05$$

en donde el valor Δ_o se ha obtenido de un análisis elástico de primer orden utilizando para la losa en dos direcciones $0.25\,I_g$ y para las columnas de soporte $0.70\,I_g$.

Pórticos	Δ_o (mm)	ΣP_u (kN)	v_s (kN)	ℓ_c (mm)	Q	Observaciones
Sentido literal	12.45	18506	4915	4000	0.012	Piso arriostrado
Sentido numérico	16.58	18506	4915	4000	0.016	Piso arriostrado

Por lo tanto no se tienen en cuenta los efectos globales de esbeltez.

3) Efectos locales de esbeltez

Para tener en cuenta los efectos de esbeltez en elementos sometidos a compresión se analizarán los dos casos según que se consideren arriostrados o no arriostrados contra desplazamientos laterales:

Pórtico en sentido literal

Columnas	Piso	Sección (m)	$k\ell_u$ (m)	r (m)	$\frac{k\ell_u}{r}$	M_1 (N·m)	M_2 (N·m)	$12\frac{M_1}{M_2}$	$34-12\frac{M_1}{M_2}$	Observaciones
B2 – B4 D2 – D4	1	0.55x0.65	3.25	0.195	16.67	–56.23	96.04	–6.00	40.00	$\frac{k\ell_u}{r} \le 34-12\frac{M_1}{M_2}$

Pórtico en sentido numérico

Columnas	Piso	Sección (m)	$k\ell_u$ (m)	r (m)	$\frac{k\ell_u}{r}$	M_1 (N·m)	M_2 (N·m)	$12\frac{M_1}{M_2}$	$34-12\frac{M_1}{M_2}$	Observaciones
B2 – B4 D2 – D4	1	0.65x0.55	3.25	0.165	19.70	–62.89	108.06	–6.00	40.00	$\frac{k\ell_u}{r} \le 34-12\frac{M_1}{M_2}$

No obstante que las columnas propuestas muestran un valor de $\left(\frac{k\ell_u}{r} < 22\right)$ y $\frac{k\ell_u}{r} < 34-12\frac{M_1}{M_2}$, por lo que "se puede ignorar los efectos de esbeltez", se calcularán a continuación como una muestra de su aplicación.

Las columnas deben diseñarse para la carga axial mayorada P_u y el momento amplificado por efectos de pandeo local M_c, utilizando el coeficiente de amplificación por efectos locales de pandeo δ:

$$M_c = \delta M_2$$

donde el coeficiente local de amplificación, δ, está dado por:

$$\delta = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75P_c}} \geq 1.0$$

La carga crítica de la columna, P_c, se debe calcular como:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2}$$

La rigidez EI para el cálculo de la carga crítica debe tomarse como:

$$EI = \frac{0.2E_cI_g + E_sI_{se}}{1+\beta_{dns}} \quad \text{ó} \quad EI = \frac{0.4E_cI_g}{1+\beta_{dns}}$$

en donde:

I_{se} = momento de inercia del refuerzo con respecto al eje centroidal de la sección transversal del elemento;

β_{dns} = relación entre la máxima carga axial sostenida mayorada dentro de un piso y la máxima carga axial mayorada asociada con las misma combinación de carga, pero no debe ser mayor de 1.0.

En los elementos sin cargas transversales entre apoyos, C_m debe tomarse como:

$$C_m = 0.6 + 0.4\frac{M_1}{M_2}$$

en donde M_1 es el menor de los momentos mayorados en los extremos de la columna, positivo si el elemento se deforma en curvatura simple y negativo si se deforma con curvatura doble y M_2 es el mayor de los momentos mayorados en los extremos, siempre positivo. En este caso M_1/M_2 es negativo, porque la columna está deformada en curvatura doble.

A continuación, los cuadros resumen para el cálculo del mencionado coeficiente.

Sentido literal: columnas: 0.55x0.65; β_{dns}= 0.85; k = 1; h =4.00; ℓ_u = 3.25 m; $E_c = 4700\sqrt{f'_c}$ MPa

	C_m				δ							
Tramo	M_1 kN·m	M_2 kN·m	$0.4\frac{M_1}{M_2}$	C_m	P_u= 1.625P kN	$0.40E_cI_g$ kN·m^2	EI kN·m^2	P_{crit} kN	P_c s/mat kN	$1-\frac{P_u}{0.75P_c}$	δ	δ adoptado
2o Piso - Centro	-56.23	173.5	-0.13	0.47	1285.2	108616	58711	54902	7849	0.78	0.60	1.00

Sentido numérico: columnas:0.65x0.55;β_{dns}= 0.85; k = 1; h =4.00; ℓ_u=3.25 m; $E_c = 4700\sqrt{f'_c}$ MPa

	C_m				δ							
Tramo	M_1 kN·m	M_2 kN·m	$0.4\frac{M_1}{M_2}$	C_m	P_u= 1.625P kN	$0.40E_cI_g$ kN·m^2	EI kN·m^2	P_{crit} kN	P_c s/mat kN	$1-\frac{P_u}{0.75P_c}$	δ	δ adoptado
2o Piso - Centro	-62.89	166.4	-0.15	0.45	1232.7	77766	42036	39239	7849	0.79	0.57	1.00

El valor P_c según materiales corresponde a la resistencia máxima de la columna por sus propios materiales, calculada por la expresión $P_n = 0.85f'_c(A_g - A_{st}) + A_{st}f_y$ para una armadura del 1% de la sección.

El valor de M_2 no debe ser menor que $M_{2,min} = P_u(15 + 0.03h)$, con 15 y h en mm tomado con respecto a cada eje independientemente y P_u = carga axial mayorada.

4) Diseño del refuerzo longitudinal

Para el diseño por flexión biaxial se utiliza en primer término, y con fines especialmente didácticos, el método aproximado desarrollado por Boris Bresler, el cual consiste en diseñar la columna para su excentricidad en cada dirección, colocar una armadura de

compensación y revisar por la fórmula de interacción denominada "ecuación de Bresler".

A continuación se presentan en cuadros resumen los datos para el diseño propiamente dicho en cada dirección y la revisión de Bresler:

Datos:

Pórtico sentido literal

Columna	Tramo	Sección	$P_u = 1.625P$	M_2	δM_2	P_{su}	M_{su}
B2 – B4 D2 – D4	P2 - Cto	0.55 x0.65	1285.2	173.5	173.5	3.6	196.9

Pórtico sentido numérico

Columna	Tramo	Sección	$P_u = 1.625P$	M_2	δM_2	P_{su}	M_{su}
B2 – B4 D2 – D4	P2 – Cto	0.65 x 0.55	1232.7	166.4	166.4	3.5	194.3

Diseño

Pórtico sentido literal

Tramo	Sección	P_u	M_u	ρ_t	A_{st}	Refuerzo
P2 – Cto	0.55x0.65	1285.2	358.3	0.0100	0.003575	8 ϕ 1"

Pórtico sentido numérico

Tramo	Sección	P_u	M_u	ρ_t	A_{st}	Refuerzo
P2 – Cto	0.65x0.55	1285.2	349.1	0.0100	0.003575	8 ϕ 1"

En estas tablas las cargas P_u y M_u se obtuvieron sumando las fuerzas internas debidas a cargas verticales mayoradas por un factor que el diseñador considere apropiado (U=1.625 en este caso) y obtenidas de un análisis elástico de primer orden, amplificadas por el coeficiente local

correspondiente (δ =1.0 en este ejemplo) y multiplicadas por 0.93 que es el coeficiente que relaciona las partes correspondientes de las ecuaciones C.9.5 (1.2D+1.0L) y C.9.2 (1.2D+1.6L) en el ejemplo propuesto, con las fuerzas internas producidas por las fuerzas horizontales obtenidas del análisis correspondiente y divididas por el coeficiente de capacidad de disipación de energía R (2.5 para el sistema reticular celulado en DMO). Estas fuerzas así obtenidas deben compararse con las calculadas a partir de las cargas verticales mayoradas y amplificadas.

Revisión por el método de las cargas reciprocas de Bresler

Consiste en obtener ϕP_n a partir de de la relación de cargas reciprocas así:

Adoptando un refuerzo de 18 ϕ 1" de las cuales 5 se colocan en 0.55 m y aplicando:

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_{nx0}} + \frac{1}{P_{ny0}} - \frac{1}{P_{n0}}$$ en donde:

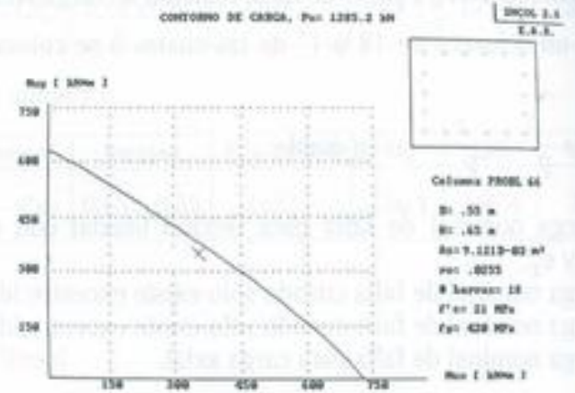
P_n = carga nominal de falla para flexión biaxial con excentricidades e_x y e_y;
P_{nx0} = carga nominal de falla cuando sólo existe excentricidad en x : e_x;
P_{ny0} = carga nominal de falla cuando sólo existe excentricidad en y : e_y;
P_{n0} = carga nominal de falla para carga axial.

Tramo	Sección	Arm.	A_s m^2	P_{nx0} kN	$\frac{1}{P_{nx0}}$	P_{ny0}	$\frac{1}{P_{ny0}}$	P_{n0}	$\frac{1}{P_{n0}}$	P_n kN	$\phi P_n = P_u$ kN
P2 – Cto	0.55x0.65	18 ϕ 1"	0.00918	4548	0.000220	4072	0.000246	10102	0.000099	2724	1771

La revisión resulta admisible. En este caso, por tratarse de excentricidades grandes en ambas direcciones, la armadura adoptada resulta bastante superior a la que se calculó en cada dirección con la suposición de la existencia de la flexión sólo en la dirección considerada. El método resulta mucho menos oneroso, cuando las excentricidades en términos de e/t son muy desiguales llegando hasta la recomendación de algunos autores en el sentido de utilizar el método de diseño para flexión biaxial solo si la menor excentricidad en términos de e/t excede el 20% de la excentricidad mayor. Por otra parte, y a discreción del diseñador, el Reglamento colombiano

también permite trabajar las columnas "para un estado de esfuerzos causado por la concurrencia simultánea del 100% de las fuerzas sísmicas en una dirección y el 30% de las fuerzas sísmicas en la dirección perpendicular".

COLUMNA	Prob 6-6					UNCOL 2.6 E.A.R.
B =	.55 m	H =	.65 m	d' =	.07 m	
f'c =	21.1 MPa	fy =	420 MPa			
Pu =	1285.2 kN	Mux =	358.3 kN*m	Muy =	349.1 kN*m	
Pmáx =	4899.03 kN					
ϕPn =	1284.94 kN	ϕMnox =	731.89 kN*m	ϕMnoy =	632.54 kN*m	
ro. mín =	.01	ro =	.0255	ro. max =	.04	
Ecuación de Bresler = .348						



5) Diseño del refuerzo transversal

Requisitos de confinamiento

Según C.21.3.5.7 del Reglamento colombiano, debe utilizarse refuerzo en estribos de confinamiento de acuerdo al siguiente diseño, a menos que se requieran cantidades mayores por esfuerzos cortantes.

Utilizando estribos rectangulares, el área total de los estribos de confinamiento de diámetro mínimo No.3 debe ser mayor de la que se obtiene por medio de las ecuaciones siguientes, para las direcciones principales de la sección de la columna:

$$s_1 = \frac{A_{sh} * f_{yt}}{0.20 b_c f'_c \left[\left(\frac{A_g}{A_{ch}}\right) - 1\right]}$$ y

$$s_2 = \frac{A_{sh} * f_{yt}}{0.06 b_c f'_c}$$

en donde:

$$A_g = 550 * 650 = 357500 \text{ mm}^2$$

$$A_{ch} = (550 - 80) * (650 - 80) = 267900 \text{ mm}^2$$

En el sentido x:

$$A_{sh} = 3 * 71 = 213 \text{ mm}^2$$

$$b_c = 550 - 2 * 40 = 470 \text{ mm}$$

$$s_1 = \frac{213 * 420000}{0.20 * 470 * 21100 * \left[\left(\frac{357500}{267900}\right) - 1\right]} = 136.7 \text{ mm} \sim 130 \text{ mm}$$

$$s_2 = \frac{213 * 420000}{0.06 * 470 * 21100} = 150.3 \text{ mm} \sim 150 \text{ mm}$$

En el sentido *y*:

$$A_{sh} = 4 * 71 = 284 \text{ mm}^2$$

$$b_c = 650 - 2 * 40 = 570 \text{ mm}$$

$$s_1 = \frac{284 * 420000}{0.20 * 570 * 21100 * \left[\left(\frac{357500}{267900}\right) - 1\right]} = 150.3 \text{ mm} \sim 150 \text{ mm}$$

$$s_2 = \frac{284 * 420000}{0.06 * 570 * 21100} = 165.3 \text{ mm} \sim 160 \text{ mm}$$

Por tanto, la separación de los estribos de confinamiento no puede ser mayor a 130 mm. Estos estribos pueden ser sencillos o múltiples y se debe utilizar estribos suplementarios del mismo diámetro de barra y con el mismo espaciamiento. Los estribos suplementarios no deben estar separados o las ramas de los estribos múltiples no deben estar separadas a más de 350 mm centro a centro, en la dirección perpendicular al eje longitudinal del elemento estructural.

Adicionalmente, el Reglamento colombiano especifica que el refuerzo transversal de confinamiento debe colocarse a un espaciamiento que no exceda:

- 8 d_b de la barra longitudinal confinada de menor diámetro: $8*25.4 = 203.2$ mm
- 16 d_b de la barra del estribo cerrado de confinamiento: $16*9.5 = 152$ mm
- 1/3 de la menor dimensión de la sección transversal de la columna: $\frac{1}{3}*550 = 183.3$ mm
- 150 mm

Luego, la separación calculada de 130 mm es correcta.

Como una alternativa al diseño anterior, dice el Reglamento NSR-10 que se puede colocar estribos de confinamiento de diámetro No.3 con f_{yt} =420 MPa y una separación s de 100 mm; si la distancia horizontal entre dos ramas paralelas del estribo es mayor que la mitad de la menor dimensión de la sección de la columna ó 200 mm, deben utilizarse estribos suplementarios del mismo diámetro y calidad que sean necesarios para que esta separación entre ramas paralelas no exceda de la mitad de la dimensión menor de la columna ó 200 mm. Este procedimiento solo puede emplearse en columnas cuyo concreto tenga un f'_c menor o igual a 35 MPa.

El refuerzo de confinamiento debe colocarse dentro de una distancia ℓ_o medida a partir de la cara del nudo en ambos extremos de la columna y en cualquier lugar donde pueda producirse plastificación por flexión asociada con los desplazamientos inelásticos del pórtico. La longitud ℓ_o no puede ser menor que:

- la máxima dimensión del elemento en la cara del nudo o en el sitio donde puede ocurrir la plastificación por flexión. En este problema es 650 mm.
- 1/6 de la luz libre de la columna: $\frac{1}{6}*3250 = 542$ mm
- 500 mm

Por consiguiente, se considera una zona de confinamiento de por lo menos 650 mm a partir de la cara del nudo. En el caso del primer tramo de las columnas, esta zona debe prolongarse para tener en cuenta la influencia de la losa de contrapiso sobre la columna.

Cuando el refuerzo de confinamiento no se coloca en toda la longitud de la columna, la zona donde no se coloca debe tener refuerzo en estribos con la misma disposición, diámetro de barra y resistencia a la fluencia f_y y su espaciamiento centro a centro no debe ser mayor de dos veces el espaciamiento utilizado en la zona de confinamiento (260 mm en este caso) o 16 d_b de la barra longitudinal más pequeña (406.4 mm) o 48 d_b de la barra de estribos (456 mm) o la menor dimensión de la sección de la columna (550 mm).

Para el problema que se expone, se usan los estribos de confinamiento de la alternativa, es decir, estribos de barra No.3 con f_{yt} = 420 MPa colocados cada 100 mm en una longitud de mínimo 650 mm, y donde no se coloca refuerzo de confinamiento se pondrán los mismos estribos a una separación de 200 mm, como un diseño preliminar a la revisión para cortante.

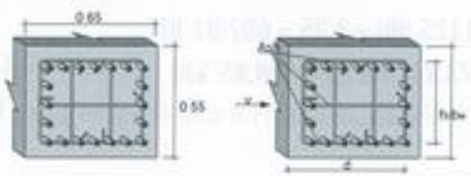


Figura 6.14

Requisitos para cortante

El ϕV_n de las columnas que resisten efectos sísmicos, E, no debe ser menor que el menor de:

a) La suma del cortante asociado con el desarrollo de los momentos nominales del elemento en cada extremo restringido de la luz libre y el cortante calculado para cargas gravitacionales mayoradas.

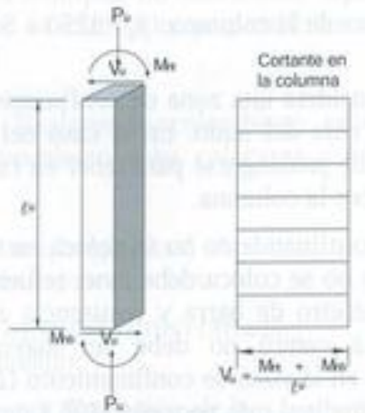


Figura 6.15

Por lo tanto, para la carga P_u ó $\phi P_n = 1285.2$ kN, obtenemos de los diagramas de interacción los siguientes momentos:

$\phi M_{nox} = 731.89$ kN·m y $\phi M_{noy} = 632.54$ kN·m. Luego $M_{nox} = 1125.98$ kN·m y $M_{noy} = 973.14$ kN·m. Los valores de V_{ex} y V_{ey} se calculan para la altura libre 3.25 m:

$$V_{ex} = (1125.98 + 1125.98) \div 3.25 = 692.91 \text{ kN}$$
$$V_{ey} = (973.14 + 973.14) \div 3.25 = 598.85 \text{ kN}$$

Cortante en la dirección x:

Para un diagrama de cortante constante, se calcula ϕV_s para la zona no confinada o parte central de la columna con los estribos colocados a la misma separación de la zona de confinamiento.

$A_v = 3 * 0.000071 = 0.000213 \text{ m}^2$
$b_w = 0.55$ m
$d = 0.58$ m
$s = 0.10$ m

$$\phi V_s = V_u - \phi V_c = \frac{0.75 * 0.000213 * 420000 * 0.58}{0.10} = 389.15 \text{ kN}$$

$$\phi V_c = \phi 0.17 \sqrt{f'_c} b_w d * 1000 = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 0.55 * 0.58 * 1000 = 186.69 \text{kN}$$

$$\phi V_s + \phi V_c = 575.84 \text{ kN}$$

Con la misma separación y estribos No 4 se obtiene

$\phi V_s = 707.05$ kN $\qquad \phi V_s + \phi V_c = 893.74$ kN $> V_{ex}$

b) El cortante máximo obtenido de las combinaciones de carga de diseño que incluye E, considerando E como el doble del prescrito por el título A del Reglamento NSR-10.

En este caso, por ejemplo, la combinación de carga definida por la ecuación

U=1.2D+1.0E+1.0L

queda:

U=1.2D+2.0E+1.0L

donde E es el valor especificado arriba mencionado

Por lo tanto:

$$V_{ex} = 1.2*17.0 + 2.0*88.7 + 1.0*7.6 = 205.4$$

Resultando este valor de V_{ex} menor que 893.74 por lo que se considera que el diseño allí efectuado es válido.

Cortante en la dirección y

$A_v = 4*0.000129 = 0.000516\ m^2$

$b_w = 0.65\ m$

$d = 0.48\ m$

$s = 0.10\ m$ (separación determinada en la dirección V_x)

$$\phi V_s = V_u - \phi V_c = \frac{0.75*0.000516*420000*0.48}{0.10} = 780.19\ kN$$

$$\phi V_c = \phi 0.17\sqrt{f'_c} b_w d*1000 = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*0.65*0.48*1000$$

$\phi V_c = 182.59 kN$

$\phi V_s + \phi V_c = 962.78\ kN > V_{ey}$

Por otra parte considerando:

U=1.2D+2.0E+1.0L, resulta:

$$V_{ey} = 1.2*19.1 + 2.0*88.8 + 1.0*8.6 = 209.1$$

y V_{ey} es menor que 962.78 por lo que se considera que el diseño allí efectuado es válido.

Requisitos del refuerzo transversal en los nudos

El Reglamento colombiano especifica que en los nudos de un pórtico debe confinarse el concreto mediante la colocación de estribos adicionales, espirales o concreto externo. Para pórticos intermedios resistentes a momento con capacidad modera de disipación de energía (DMO), el área de

refuerzo transversal no debe ser menor que el requerido por $A_{v,min} = 0.062\sqrt{f'_c}\frac{b_w s}{f_{yt}}$ pero no debe ser menor a $\frac{0.35 b_w s}{f_{yt}}$.

Por lo tanto, para un espesor en el nudo de 0.40 m

$$s = \frac{2*129*420}{0.062*\sqrt{21.1}*650} = 586\ mm \quad \text{pero}$$

$$s = \frac{2*129*420}{0.35*650} = 476\ mm$$

Se debe colocar 2 estribos a 160 mm.

Igualmente dentro de la cimentación se colocan estribos con espacios iguales y menores a 476 mm, para este caso escogemos estribos No 4 c/0.225.

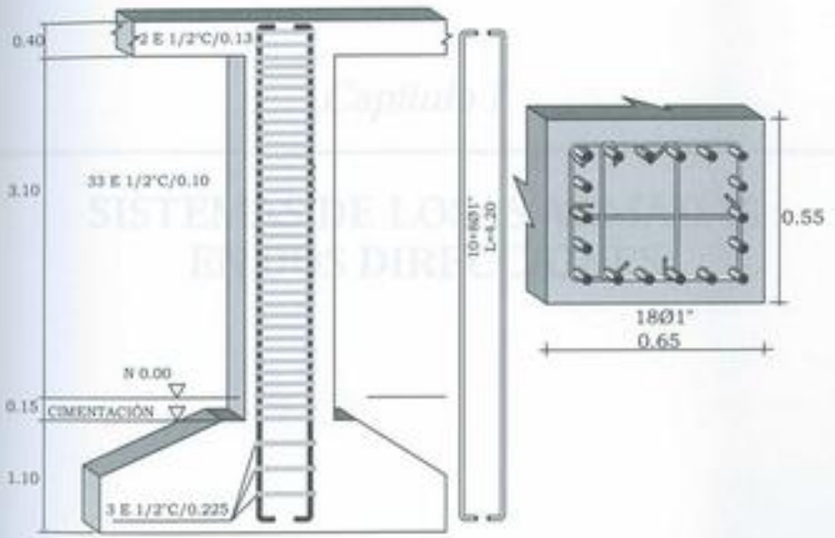


Figura 6.16

Capítulo 7

SISTEMAS DE LOSAS ARMADAS EN DOS DIRECCIONES

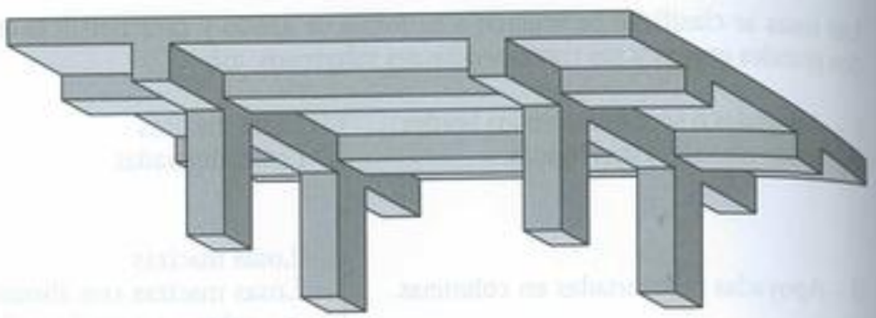
SISTEMAS DE LOSAS ARMADAS EN DOS DIRECCIONES

Tipos de losas

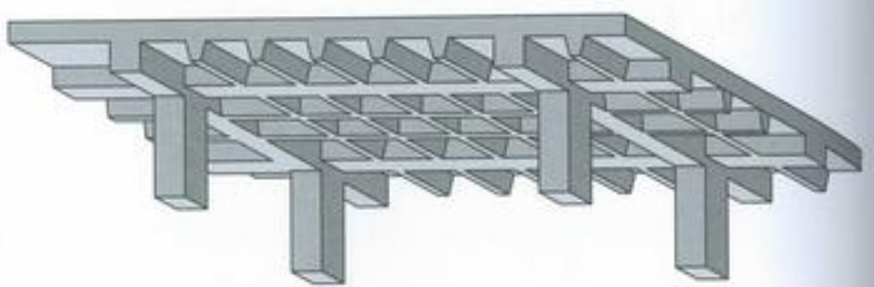
Las losas se clasifican de acuerdo a su forma de apoyo y características en dos grandes grupos y sus correspondientes subgrupos, así:

I - Apoyadas o soportadas en los bordes sobre muros o vigas rígidas.	- Losas macizas - Losas aligeradas
II - Apoyadas o soportadas en columnas.	- Losas macizas - Losas macizas con ábacos o sobre espesores y/o capiteles de columna - Losas aligeradas o reticulares

En las figuras 7.1.a y 7.1.b se muestran los diferentes tipos de losas, sin incluir aquellas apoyadas sobre el terreno utilizadas como cimentaciones.

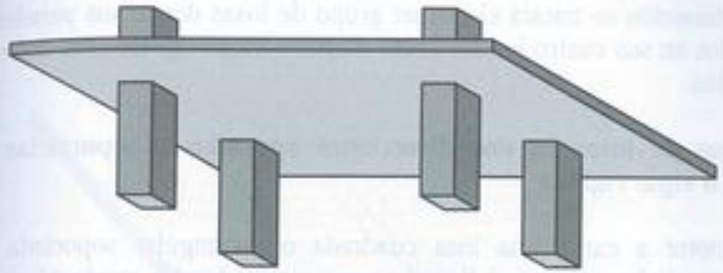


Losa maciza armada en dos direcciones
soportada por vigas en sus cuatro bordes

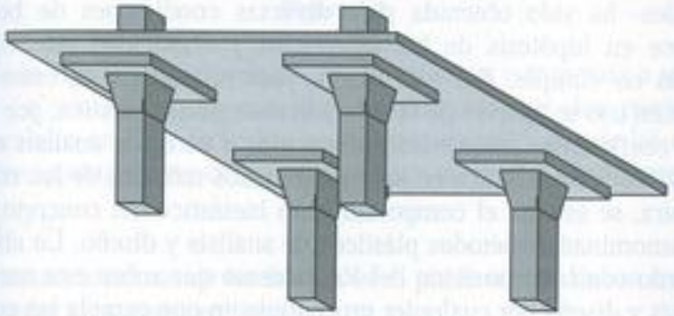


Losa aligerada armada en dos direcciones
soportada por vigas en sus cuatro bordes

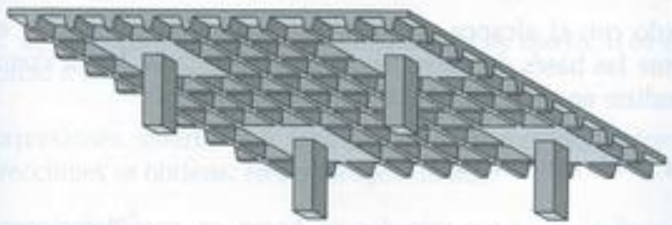
Figura 7.1.a



Losa maciza armada en dos direcciones
soportada en columnas sin capiteles



Losa maciza armada en dos direcciones
soportada en columnas con capiteles y ábacos



Losa aligerada armada en dos direcciones
soportada en columnas (reticular cedulado)

Figura 7.1.b

A continuación se tratará el primer grupo de losas donde sus paneles están apoyados en sus cuatro bordes sobre muros o vigas rígidas ante deflexiones verticales.

Sistemas de losas en dos direcciones apoyadas o soportadas sobre muros o vigas rígidas

Al someter a carga una losa cuadrada o rectangular soportada en su contorno, dicha carga será llevada a sus cuatro bordes produciéndose una superficie deformada cuya expresión matemática -a partir de la cual se podrían obtener momentos flectores, esfuerzos de corte y momentos torsionales- ha sido obtenida para diversas condiciones de borde, pero basándose en hipótesis de homogeneidad y elasticidad que el concreto reforzado no cumple. Por esta razón, para el análisis de estas losas los métodos en uso se apartan de la solución matemática elástica; por una parte, se usan coeficientes aproximados deducidos a partir de análisis elásticos y de redistribución inelástica en los denominados métodos de los coeficientes y, por otra, se estudia el comportamiento inelástico del concreto reforzado en los denominados métodos plásticos de análisis y diseño. Lo anterior está de acuerdo con la disposición del Reglamento que sobre este tema permite el análisis y diseño por cualquier procedimiento que cumpla las condiciones de equilibrio y compatibilidad geométrica, demostrando además que la resistencia de diseño es por lo menos igual a la resistencia requerida.

De acuerdo con el alcance previsto del presente texto, sólo se expondrán brevemente las bases de estos métodos, remitiendo al lector con necesidad de profundizar en su teoría a la bibliografía presentada.

Métodos de los coeficientes

La mayor parte de estos métodos se basan en consideraciones como la siguiente:

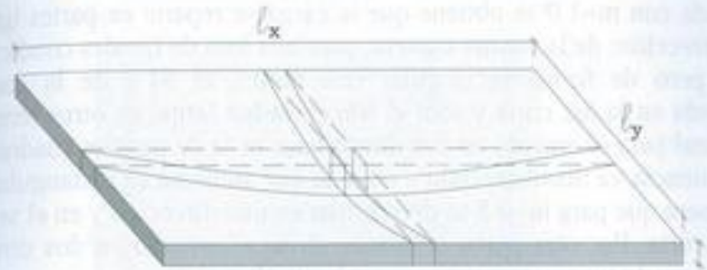


Figura 7.2

La losa de la figura 7.2, armada en dos direcciones y sometida a una carga uniforme "q" en kN/m^2, se considera conformada por dos conjuntos de franjas paralelas en cada dirección y de ancho unitario, dos de las cuales al intersecarse soportan parte de la carga q en x y parte en y, de manera que:

$$q = q_x + q_y$$

Las deflexiones máximas de las franjas en el punto común deben ser iguales y corresponder a expresiones como:

$$\Delta x = \frac{k_x q_x \ell_x^4}{EI} \qquad \Delta y = \frac{k_y q_y \ell_y^4}{EI}$$

en donde k_x y k_y corresponden a las condiciones de apoyo, E es el módulo de elasticidad e I es el momento de inercia.

De las expresiones anteriores e igualando los momentos de inercia para ambas direcciones se obtiene, en forma aproximada:

$$q_x = q\frac{k_y m^4}{k_x + k_y m^4} \qquad \text{y} \qquad q_y = q\frac{k_x}{k_x + k_y m^4}$$

en donde $m = \frac{\ell_y}{\ell_x}$

Utilizando estas expresiones para idénticas condiciones de borde y losa cuadrada con m=1.0 se obtiene que la carga se reparte en partes iguales en cada dirección; de la misma manera, para una losa de iguales condiciones de carga pero de forma rectangular con m=0.5 el 94% de la carga será soportada en la luz corta y sólo el 6% en la luz larga; en otros términos, la losa ideal para el armado en dos direcciones es la de paneles cuadrados y su conveniencia va disminuyendo a medida que aumenta su rectangularidad de tal manera que para m=0.5 se debe armar en una dirección y en el sentido de la luz corta. Por otra parte, será más obvio el armado en dos direcciones cuando sea de interés repartir la carga o sus efectos.

El raciocinio anterior es aproximadamente válido si se trata de franjas centrales aisladas; sin embargo, la existencia de otras franjas paralelas a los bordes y a las consideradas, hace que éstas se apoyen no solo en los bordes sino también en las franjas ortogonales y en las paralelas, disminuyéndose su deflexión y por consiguiente los momentos de flexión. Por eso se puede decir que la carga en una losa de estas características la resuelven no solo los momentos flectores en ambas direcciones sino también los momentos de torsión resultando los momentos máximos reducidos y facilitándose una redistribución inelástica. A continuación un ejemplo de aplicación.

Problema 7.1

Diseñar una losa maciza armada en dos direcciones apoyada sobre vigas rígidas.

En un proceso de sólo evaluación preliminar, se trata de diseñar el tablero o panel interior de la figura en losa maciza armada en dos direcciones soportada en todo su contorno por vigas rígidas sobre columnas, si se considera que este panel hace parte de un sistema estructural monolítico de cubierta accesible de un salón múltiple para un conjunto habitacional multifamiliar de varias luces, utilizando concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero de refuerzo de baja resistencia para f_y = 240 MPa.

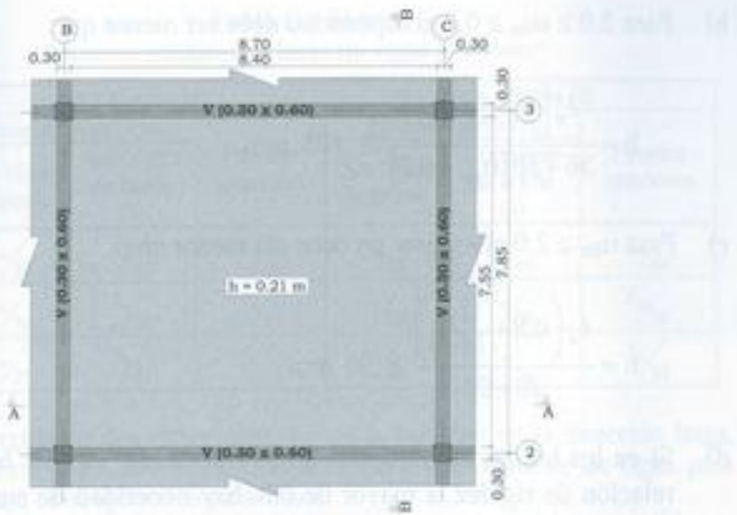


Figura 7.3

Solución

Como una primera alternativa para la obtención de un espesor mínimo de la losa se usa la expresión:

$$t = \frac{\text{perímetro libre del panel}}{180} \geq 0.09 \text{ m}$$

$$\therefore t = \frac{2*(7.55+8.40)}{180} = 0.177 \text{ m} \sim 0.18 \text{ m}$$

Como otra posibilidad en la obtención del espesor mínimo de la losa, se pueden utilizar las siguientes expresiones del Reglamento:

a) Para $\alpha_{fm} \leq 0.2$ se deben cumplir los requisitos de C.9.5.3.2, correspondientes al espesor mínimo de losas sin vigas interiores entre apoyos.

b) Para $2.0 \geq \alpha_{fm} \geq 0.2$ el espesor no debe ser menor que:

$$h = \frac{\ell_n\left(0.8 + \frac{f_y}{1400}\right)}{36 + 5\beta[\alpha_{fm} - 0.2]} \geq 125 \text{ mm} \qquad \text{C.9-12}$$

c) Para $\alpha_{fm} \geq 2.0$ el espesor no debe ser menor que:

$$h = \frac{\ell_n\left(0.8 + \frac{f_y}{1400}\right)}{36 + 9\beta} \geq 90 \text{ mm} \qquad \text{C.9-13}$$

d) Si en los bordes discontinuos no se coloca una viga de borde con una relación de rigidez α mayor de 0.8, hay necesidad de aumentar en un diez por ciento el espesor requerido por las ecuaciones C.9-12 o C.9-13 en el panel con el borde discontinuo.

ℓ_n = luz libre en la longitud larga, en mm;

β = relación de la luz libre larga a la corta;

α_y = relación de la rigidez a la flexión de la sección de viga con respecto a la rigidez de un sector de losa definido lateralmente por los ejes centrales de los paneles adyacentes (en caso de que existan) a ambos lados de la viga;

α_{fm} = valor promedio de α_f para todas las vigas existentes en los bordes del panel.

Sin embargo, como su utilización implica la adopción de una primera dimensión, es posible usar la Tabla C.9.5(c) del Reglamento, como si no existieran vigas interiores, para obtener una dimensión tentativa máxima existiendo siempre la posibilidad, también como alternativa, de comparar con las deflexiones máximas permisibles especificadas en la Tabla C.9.5(b).

Tabla C.9.5(c)
Espesores mínimos de losas sin vigas interiores*

f_y MPa (1)	Sin ábacos (2)			Con ábacos (2)		
	Paneles exteriores		Paneles interiores	Paneles exteriores		Paneles interiores
	Sin vigas de borde	Con vigas de borde (3)		Sin vigas de borde	Con vigas de borde (3)	
280	$\ell_n/33$	$\ell_n/36$	$\ell_n/36$	$\ell_n/36$	$\ell_n/40$	$\ell_n/40$
420	$\ell_n/30$	$\ell_n/33$	$\ell_n/33$	$\ell_n/33$	$\ell_n/36$	$\ell_n/36$
520	$\ell_n/28$	$\ell_n/31$	$\ell_n/31$	$\ell_n/31$	$\ell_n/34$	$\ell_n/34$

*Para construcción en dos direcciones, ℓ_n, es la luz libre en la dirección larga, medida entre cara de los apoyos en losas sin vigas y entre caras de las vigas, para losas con vigas u otros apoyos en otros casos.

(1) Para f_y entre los valores dados en la tabla, el espesor mínimo debe obtenerse por interpolación lineal.

(2) Abaco, como se define en C.13.2.5.

(3) Losas con vigas entre las columnas a lo largo de los bordes exteriores.

El valor de α_f para la viga de borde no debe ser menor que 0.8.

Por tanto:

$$t = \frac{\text{luz libre en la longitud larga}}{36} = \frac{\ell_n}{36}$$

$$t = \frac{8.40}{36} = 0.233 \sim 0.24 \text{ m}$$

El espesor final que se adopte también tendrá que ver con la magnitud de la carga viva y las cuantías de refuerzo esperadas. Para este ejemplo se adopta en forma preliminar t = 0.21 m. Por consiguiente, las cargas aproximadas serán:

Cargas:

Peso propio de la losa:	0.21*1.00*1.00*24	=	5.04 kN/m^2
Alistados y desniveles:	0.04*1.00*1.00*22	=	0.88 kN/m^2
Impermeabilización (cubierta):		=	0.15 kN/m^2
Afinado y cielo raso:	0.02*1.00*1.00*22	=	0.44 kN/m^2
Subtotal carga muerta:		=	6.51 kN/m^2
Carga viva:		=	1.80 kN/m^2
Total:		=	8.31 kN/m^2

Utilizando el procedimiento de la Sección C.13.9 - Losas en dos direcciones apoyadas sobre muros o vigas rígidas – del Reglamento vigente (método de los coeficientes), se divide el panel en consideración en cada dirección, en franjas centrales cuyo ancho es la mitad del panel y medias franjas de columnas con un ancho igual a un cuarto del panel, según la figura 7.4.

Franjas centrales:

Para una relación $m = \frac{\ell_a}{\ell_b} = \frac{7.55}{8.40} = 0.899 \sim 0.90$ se calcula:

Momentos negativos en los bordes (Tabla C.13.5)

Ma (negativo) = 0.055*8.31*7.55^2 = 26.05 kN·m
Mb (negativo) = 0.037*8.31*8.40^2 = 21.70 kN·m

Momentos positivos (Tablas C.13.6 y C.13.7)

Ma (positivo carga muerta)	= 0.022*6.51*7.55^2	=	8.16 kN·m
Ma (positivo carga viva)	= 0.034*1.80*7.55^2	=	3.49 kN·m
Ma (positivo total)		=	11.65 kN·m
Mb (positivo carga muerta)	= 0.014*6.51*8.40^2	=	6.43 kN·m
Mb (positivo carga viva)	= 0.022*1.80*8.40^2	=	2.79 kN·m
Mb (positivo total)		=	9.22 kN·m

Refuerzo:

Dirección luz menor: Constantes para diseño: b =1.00; d = 0.18;

	②		③
M (kN·m) =	26.05	11.65	26.05
ϕM_n = 1.5M =	39.08	17.48	39.08
ρ =	0.005812	0.002543	0.005812
A_s (m^2/m) =	0.001046	0.000458	0.001046
A_s (mínimo) =	0.0020*1.00*0.21 = 0.00042 m^2/m		
Superior:	ϕ 1/2" c/0.12 (36)		ϕ 1/2" c/0.12 (36)
Inferior:	ϕ 3/8" c/0.155	ϕ 3/8" c/0.155 (28)	ϕ 3/8" c/0.155

Dirección luz mayor: Constantes para diseño: b =1.00; d = 0.17;

	Ⓑ		Ⓒ
M (kN·m) =	21.70	9.22	21.70
ϕM_n = 1.5M =	32.55	13.83	32.55
ρ =	0.005412	0.002250	0.005412
A_s (m^2/m) =	0.000920	0.000382	0.000920
A_s (mínimo) =	0.0020*1.0*0.21 = 0.000420 m^2/m		
Superior:	ϕ 1/2"c/0.14 (28)		ϕ 1/2" c/0.14 (28)
Inferior:	ϕ 3/8" c/0.16	ϕ 3/8" c/0.16 (24)	ϕ 3/8" c/0.16

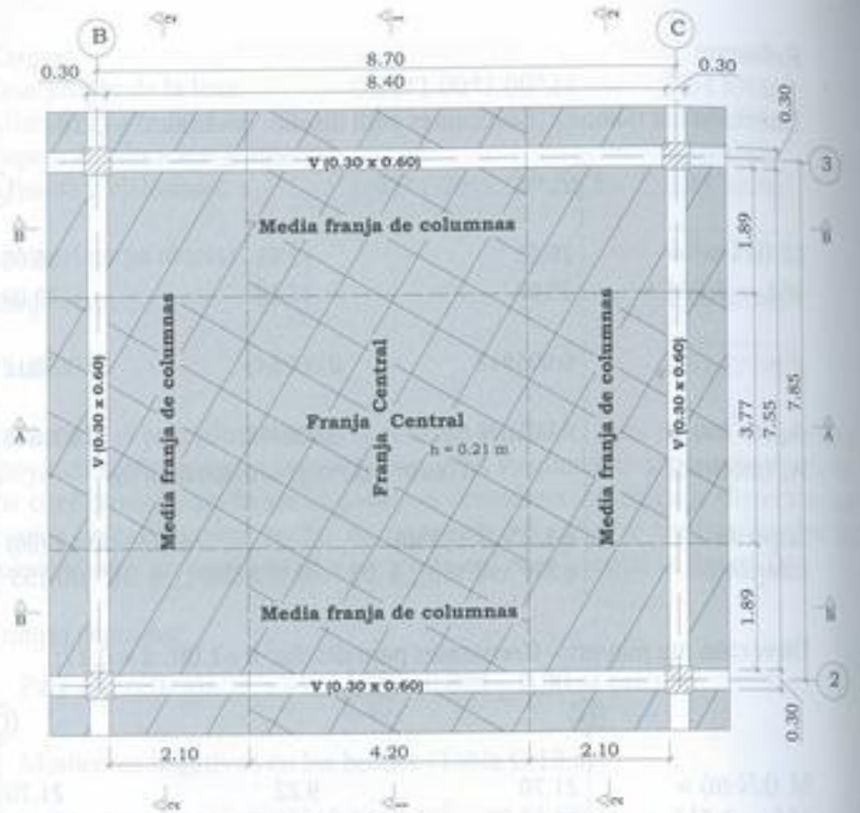


Figura 7.4

Franjas de columna:

Los momentos en las franjas de columna se reducen linealmente de su valor total Ma o Mb en el límite de la franja central a ⅓ de estos valores en el borde del panel. El refuerzo se colocará a un espaciamiento uniforme utilizando un momento promedio de ⅔ el correspondiente a las franjas centrales. Por tanto, el área de refuerzo será ⅔ de la colocada en la franja central, y para las barras del mismo diámetro el espaciamiento será de ½ el utilizado en la franja central, siempre y cuando no se exceda el límite de espaciamiento máximo y se tenga en cuenta la especificación de armadura mínima.

Refuerzo:

Dirección luz menor:

	②	③
Superior:	ϕ 1/2"c/0.17 (13 + 13)	ϕ 1/2" c/0.17 (13 +13)
Inferior:	ϕ 3/8" c/0.165__mín: ϕ 3/8" c/0.165 (12+12)	ϕ 3/8" c/0.165

Dirección luz mayor:

	Ⓑ	Ⓒ
Superior:	ϕ 1/2"c/0.21 (10 +10)	ϕ 1/2" c/0.21 (10 +10)
Inferior:	ϕ 3/8" c/0.165__mín: ϕ 3/8" c/0.165 (10+10)	ϕ 3/8" c/0.165

Esfuerzo cortante:

Para el cálculo de las reacciones, se utiliza la Tabla C.13.8 en donde para m = 0.90 en el caso 2, el 60% de la carga se transmite en la dirección de la luz menor y el 40% en la dirección de la luz mayor. El diseño del esfuerzo cortante para este ejemplo de losa maciza se reduce a verificar que para el mayor esfuerzo no se requiere refuerzo.

Dirección luz menor:

	②	③
V (kN/m) =	$0.60 * \frac{8.31 * 7.55}{2} = 18.82$	18.82
V(d) (kN/m) =	17.92	17.92
$V_u = 1.5V$ =	26.88	26.88
ϕV_c =	105.34	105.34

$V_u < \phi V_c$

Dirección luz mayor:

	Ⓑ	Ⓒ
V (kN/m)=	$0.40 * \frac{8.31 * 8.40}{2} = 13.96$	13.96
V(d) (kN/m) =	13.36	13.36

Para esta fuerza de corte, la fuerza cortante resulta inferior al obtenido en la dirección de la luz menor. Por tanto, las fuerzas cortantes mayorados resultan inferiores a los resistidos por la losa.

A manera de evaluación del espesor adoptado, y sin tener en cuenta otras consideraciones inherentes al proyecto, se observa que éste resultó apropiado, sin ningún inconveniente desde el punto de vista de la fuerza cortante y se obtuvo una armadura muy próxima a la mínima para el momento menor en las franjas centrales. Sin embargo, al colocar el refuerzo en las franjas de columnas se presenta la posibilidad de haber trabajado con un espesor menor, lo que podría significar un aumento en las deflexiones y posiblemente en el total del refuerzo requerido. En consecuencia, se mantiene el espesor adoptado y, a manera de muestra, se detalla la colocación del refuerzo, teniendo en cuenta algunas especificaciones particulares:

1 - La colocación del refuerzo se hace con barras paralelas y perpendiculares a los bordes. El refuerzo positivo consta de dos capas, por lo que se sugiere detallar especialmente su posición a fin de prevenir la colocación indiscriminada de una y otra.

2 - Para el refuerzo negativo en los bordes no continuos se considera el momento negativo como un tercio del momento positivo en la misma dirección, y el refuerzo así colocado solucionará la posible restricción existente en estos bordes.

3 - El área de refuerzo en cada dirección no debe ser menor que la necesaria para retracción de fraguado y variación de temperatura, y su espaciamiento no debe ser mayor de dos veces el espesor de la losa.

4 - La colocación del refuerzo y su interrupción o doblaje debe hacerse siguiendo los diagramas de flexión y sus puntos de inflexión respectivos. Sin embargo, para tener en cuenta la posible indeterminación en su obtención, se recomienda especial prudencia en el detallado del refuerzo a partir de las normas usuales para su colocación.

5 - El refuerzo para momento positivo y el refuerzo para momento negativo perpendiculares a un borde no continuo deben extenderse en el apoyo y anclarse con o sin gancho en las vigas, columnas o muros.

6 - En los paneles esquineros debe proporcionarse un refuerzo superior e inferior a lo largo de una distancia en cada dirección igual a $\frac{1}{5}$ de la luz más larga y del mismo calibre y espaciamiento del refuerzo para el máximo momento positivo en el panel; el refuerzo superior debe ser paralelo a la diagonal desde la esquina y el refuerzo inferior, perpendicular a dicha diagonal. Alternativamente, el refuerzo debe colocarse en dos capas paralelas a los bordes de la losa tanto en la parte superior como en la parte inferior de la losa.

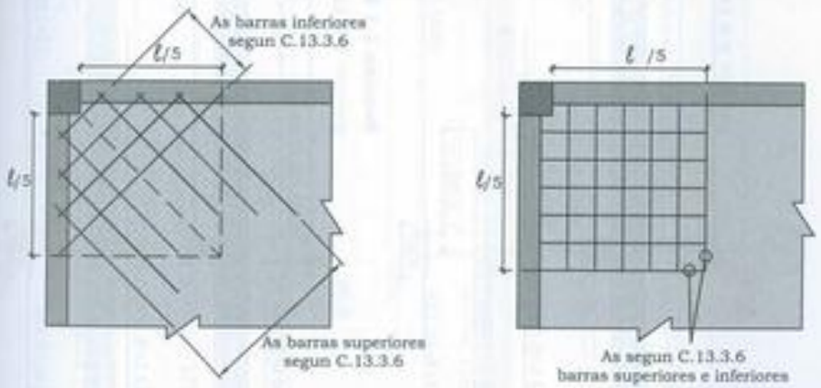
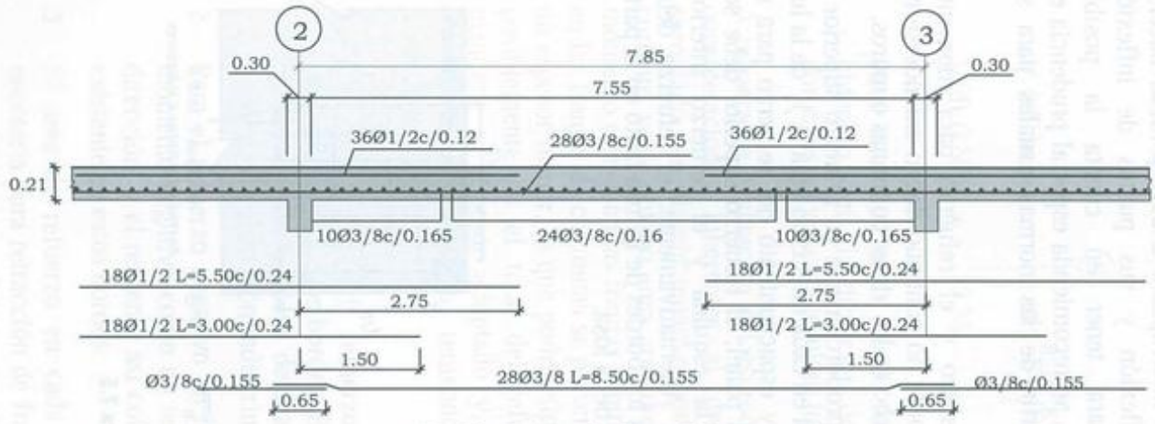
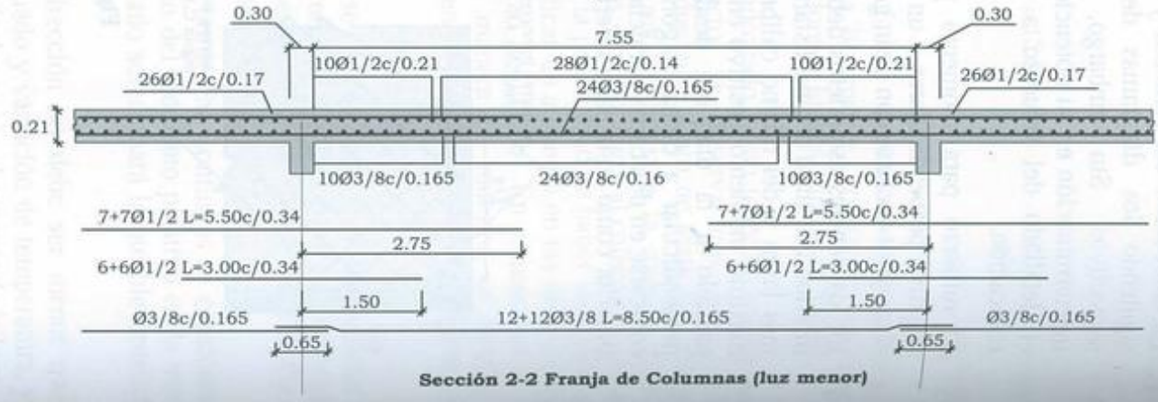


Figura 7.5

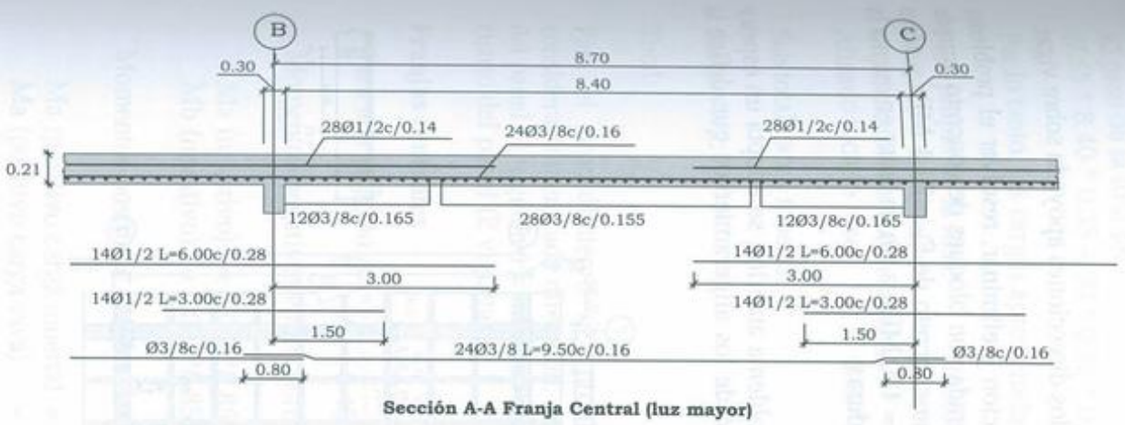


Sección 1-1 Franja Central (luz menor)

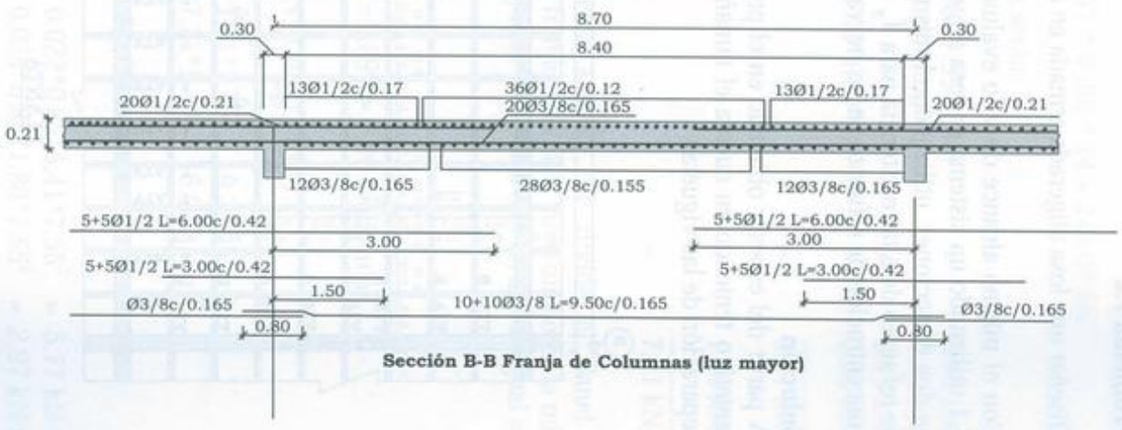


Sección 2-2 Franja de Columnas (luz menor)

Figura 7.6 a



Sección A-A Franja Central (luz mayor)



Sección B-B Franja de Columnas (luz mayor)

Figura 7.6 b

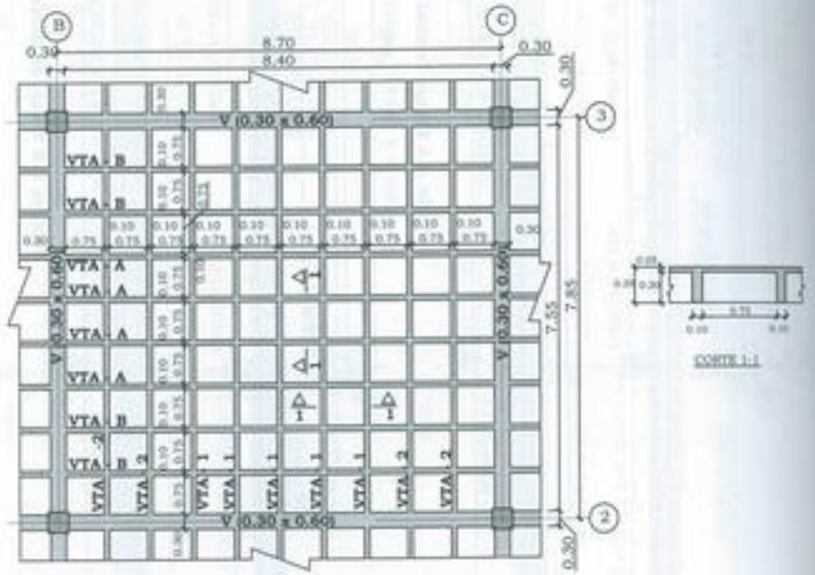
Problema 7.2

Diseñar una losa aligerada armada en dos direcciones apoyada sobre vigas.

Con el mismo alcance de sólo evaluación preliminar, resolver el problema 7.1 utilizando un sistema de losa aligerada con bloques de concreto armada en dos direcciones, utilizando el mismo concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero de refuerzo de alta resistencia para f_y = 420 MPa, a fin de tener en cuenta la concentración de refuerzo en las nervaduras.

Solución

A partir del espesor obtenido en el problema anterior, se adopta un espesor tentativo teniendo en cuenta el tamaño de los aligeramientos que define la separación de las viguetas.



PLANTA

Figura 7.7

El peso de la losa será:
(7.55 * 8.40 * 0.35 – 90 * 0.71 * 0.71 * 0.26) * 24 = 249.60 kN

Por lo tanto, las cargas aproximadas serán:

Peso propio de la losa:	249.60 ÷(7.55*8.40)	=	3.94 kN/m^2
Alistado y desniveles:	0.04*1.00*1.00*22	=	0.88 kN/m^2
Impermeabilización (cubierta)		=	0.15 kN/m^2
Afinado y cielo raso:	0.02*1.00*1.00*22	=	0.44 kN/m^2
Sub total carga muerta:		=	5.41 kN/m^2
Carga viva:		=	1.80 kN/m^2
Total:		=	7.21 kN/m^2

Para el procedimiento del problema anterior, se divide el panel en consideración en cada dirección, en franjas centrales cuyo ancho es la mitad del panel (4 viguetas) y medias franjas de columnas con un ancho igual a un cuarto del panel (2 viguetas).

Franjas centrales

Para una relación $m = \frac{\ell_a}{\ell_b} = \frac{7.55}{8.40} = 0.899 \sim 0.90$ se calcula:

Momentos negativos en los bordes (Tabla C.13.5)

Ma (negativo) = 0.055*0.85*7.21*7.55^2 = 19.21 kN·m
Mb (negativo) = 0.037*0.85*7.21*8.40^2 = 16.00 kN·m

Momentos positivos (Tablas C.13.6 y C.13.7)

Ma (positivo carga muerta)	= 0.022*0.85*5.41*7.55^2	= 5.77 kN·m
Ma (positivo carga viva)	= 0.034*0.85*1.80*7.55^2	= 2.97 kN·m
Ma (positivo total)		= 8.74 kN·m

Mb (positivo carga muerta) = $0.014*0.85*5.41*8.40^2$ = 4.54 kN·m
Mb (positivo carga viva) = $0.022*0.85*1.80*8.40^2$ = 2.38 kN·m

Mb (positivo total) = 6.92 kN·m

Refuerzo:

Dirección luz menor:
Constantes para diseño: b = 0.10; d = 0.32; ϕM_n (máx) = 50.3 kN·m

	②		③
M (kN·m) =	19.21	8.74	19.21
$\phi M_n = 1.5M$ =	28.82	13.11	28.22
ρ =	0.008246	0.003537	0.008246
A_s (m^2) =	0.000264	0.000113	0.000264
Superior	1 ϕ 5/8" + 1ϕ 1/2"		1 ϕ 5/8" + 1ϕ 1/2"
Inferior	1 ϕ 1/2"	1 ϕ 1/2"	1 ϕ 1/2"

Dirección luz mayor:
Constantes para diseño: b = 0.10; d = 0.31; ϕM_n (máx) = 47.2 kN·m

	Ⓑ		Ⓒ
M (kN·m) =	16.00	6.92	16.00
$\phi M_n = 1.5M$ =	24.00	10.38	24.00
ρ =	0.007221	0.002961	0.007221
A_s (m^2) =	0.000224	0.000092	0.000224
Superior:	2 ϕ 1/2"		2 ϕ 1/2"
Inferior:	1 ϕ 1/2"	1 ϕ 1/2"	1 ϕ 1/2"

Franjas de columna:

Los momentos en las franjas de columna se reducen linealmente de su valor total Ma o Mb en el límite de la franja central a ⅓ de estos valores en el borde del panel. El refuerzo se colocará para un momento promedio de ⅔ el correspondiente a las franjas centrales.

Refuerzo:

Dirección luz menor:

	②		③
A_s (m^2) =	0.000176	0.000075 A_s (mín) = 0.000106 m^2	0.000176
ϕ Superior:	1ϕ1/2"+1ϕ3/8"		1ϕ1/2"+1ϕ3/8"
ϕ Inferior:	1 ϕ 1/2"	1 ϕ 1/2"	1 ϕ 1/2"

Dirección luz mayor:

	Ⓑ		Ⓒ
A_s (m^2) =	0.000149	0.000061 A_s (mín) = 0.000102 m^2	0.000149
ϕSuperior:	1 ϕ 1/2" + 1 ϕ 3/8"		1 ϕ 1/2" + 1 ϕ 3/8"
ϕInferior:	1 ϕ 1/2"	1ϕ 1/2"	1 ϕ 1/2"

Fuerza cortante:

Para el cálculo de las reacciones se utiliza la Tabla C.13.8 en donde para m = 0.90 en el caso 2, el 60% de la carga se transmite en la dirección de la luz menor y el 40% en la dirección de la luz mayor.

Dirección luz menor:

	②	③
V (kN) =	$0.60 * \frac{0.85 * 7.21 * 7.55}{2} = 13.88$	13.88
V(d)(kN) =	12.70	12.70
$V_u = 1.5V$ =	19.05	19.05
ϕV_c =	18.73	18.73
Estribos:	6 ε ϕ ¼ "c/0.15 + ε ϕ ¼" c/0.35 hasta donde exista refuerzo superior	ídem

Dirección luz mayor:

	Ⓑ	Ⓒ
V (kN) =	$0.40 * \frac{0.85 * 7.21 * 8.40}{2} = 10.30$	10.30
V(d) (kN) =	9.54	9.54
$V_u = 1.5V$ =	14.31	14.31
ϕV_c =	18.14	18.14
Estribos	6 ε ϕ ¼ " c/0.15 + ε ϕ ¼" c/0.35 hasta donde exista refuerzo superior	ídem

A partir de los resultados anteriores, se concluye en principio que el espesor adoptado es apropiado. Al efectuar el diseño definitivo es posible tener en cuenta otros factores que permitan ratificar o cambiar este espesor.

A continuación el detalle del refuerzo obtenido.

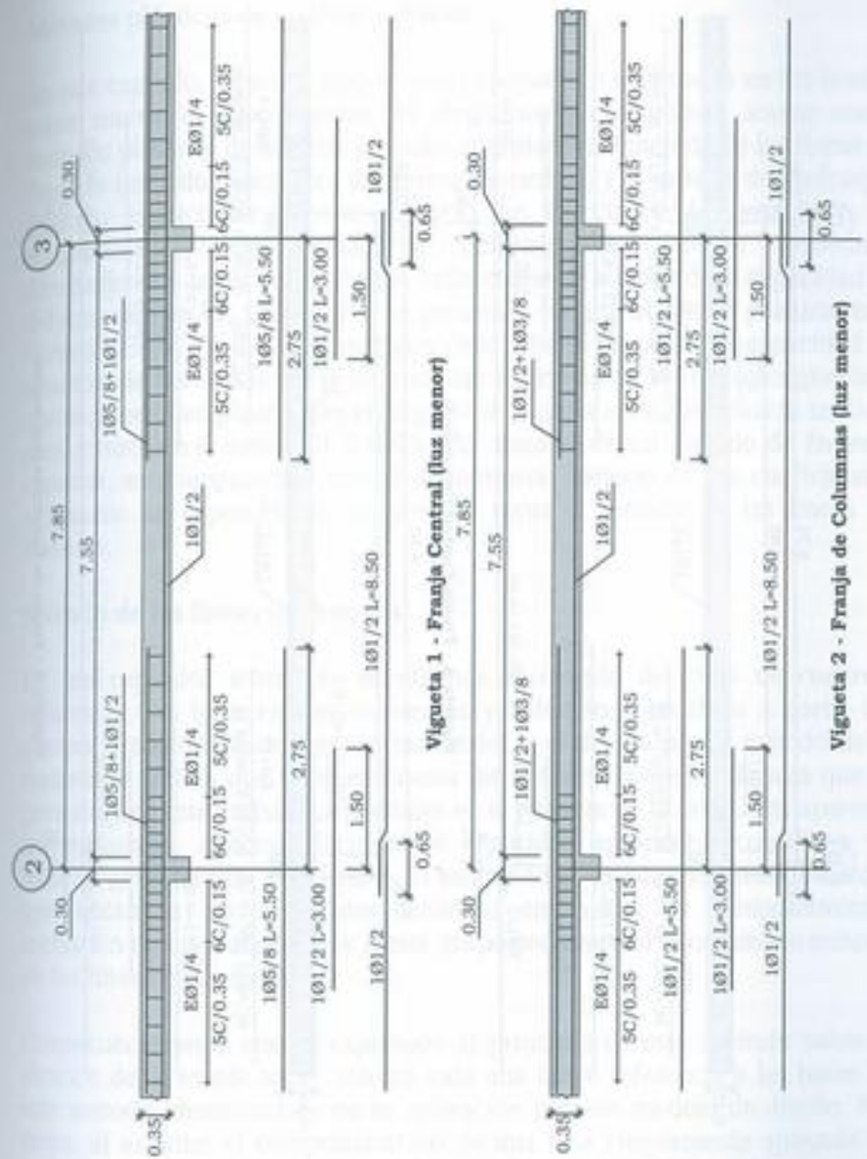


Figura 7.8a

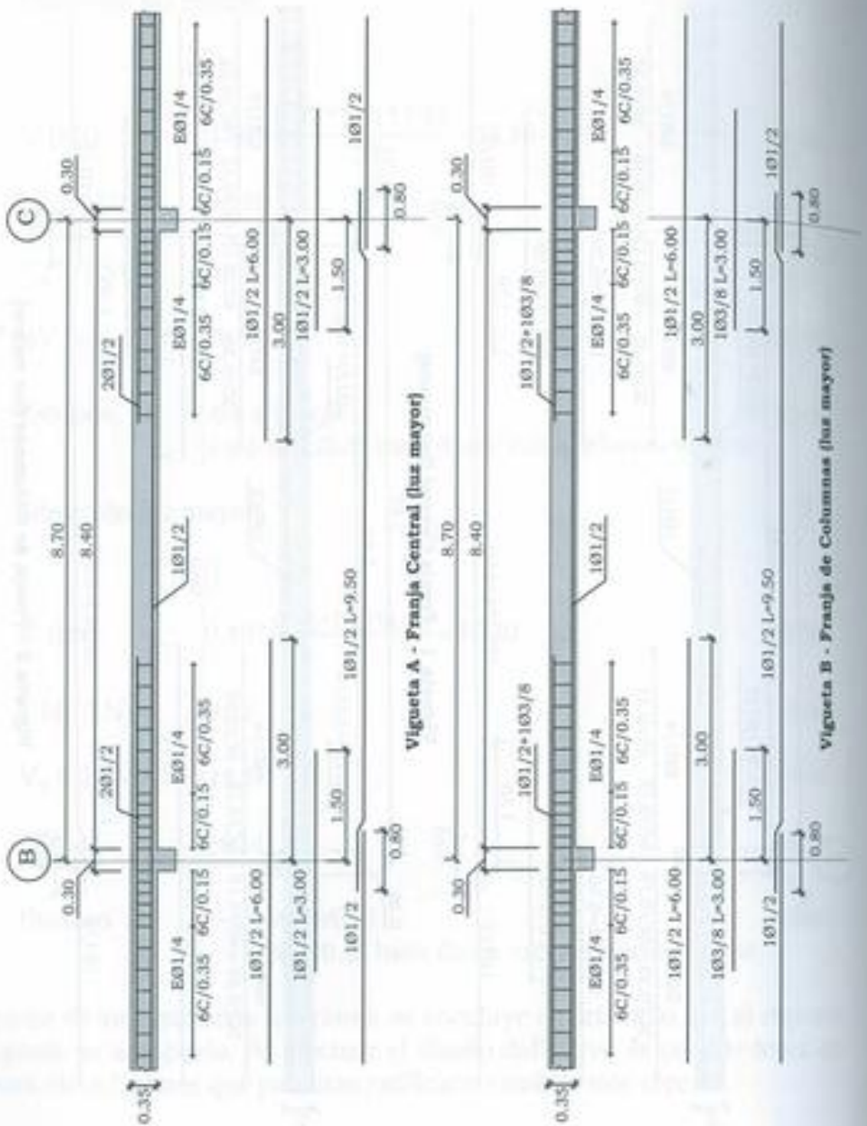


Figura 7.8b

Métodos plásticos de análisis y diseño

En este capítulo, y para el tipo de losas apoyadas o soportadas en los bordes sobre muros o vigas rígidas, el Reglamento colombiana acepta como métodos plásticos de análisis y diseño apropiados, el método de las líneas de fluencia (método cinemático de frontera superior), y el método de las franjas (método estático de frontera inferior), en los cuales, los principios de equilibrio y compatibilidad de deformaciones pueden verificarse directamente a partir del análisis o indirectamente a partir de la capacidad de deformación en los sitios donde se presentan las articulaciones plásticas o la fluencia. En el uso de estos métodos debe tenerse en cuenta la capacidad de rotación de las secciones y las cuantías máximas de refuerzo longitudinal que se pueden emplear y que el Reglamento limita a una deformacin unitaria neta a tracción ε_t menor de 0.0075. Por tratarse de un método de frontera superior, en comparación con el denominado método de los coeficientes, solamente se expondrá en el presente texto el método de las líneas de fluencia.

Método de las líneas de fluencia

En los capítulos anteriores estudiamos el cálculo de losas de concreto reforzado con base en sus momentos y esfuerzos obtenidos a partir del comportamiento elástico de los materiales y el diseño por el método de la resistencia última que tiene en cuenta las deformaciones inelásticas que se presentan en estos mismos materiales en el instante de la falla. Esta aparente incongruencia, que con factores de seguridad apropiados constituye un método generalizado de cálculo, ha motivado el estudio de procedimientos que obtengan los momentos teniendo en cuenta el comportamiento inelástico de los materiales, y a este grupo pertenece el denominado método de las líneas de fluencia.

Consecuentemente con lo expresado al principio de este capítulo sobre el alcance del presente texto, sólo se hará una breve referencia a las bases de este método, deteniéndose en su aplicación para un modelo de diseño. Por tanto, al estudiar el comportamiento de una losa simplemente apoyada en una dirección, se encuentra que el acero de tracción entra en fluencia a lo

largo de la línea transversal correspondiente al momento positivo máximo, aumentándose allí la deformación en una magnitud muy superior a la deformación elástica de la losa, por lo que a esta deformación en la línea de fluencia se la denomina deformación plástica. Para una estructura indeterminada, como puede ser la misma losa anterior empotrada en sus apoyos y suponiéndola igualmente reforzada para momentos positivos y negativos, las primeras líneas de fluencia se producen a lo largo de los apoyos, y el hundimiento de la losa sólo se presentará al formarse una tercera línea de fluencia coincidente con la línea transversal del momento positivo máximo. Por tanto, la relación de 1:2 inicialmente existente entre los momentos positivos y negativos elásticamente obtenidos ha variado, lográndose una redistribución inelástica de los momentos debida a la deformación también inelástica que se presenta en la losa y que en buena parte depende de la cuantía relativamente baja de la armadura que le permite giros y deformaciones antes de la falla por compresión en el concreto.

Una vez supuestas las posibles líneas de fluencia de acuerdo a elementales criterios de funcionamiento estructural, su situación exacta y la carga de falla de la losa se obtienen por dos procedimientos universalmente aceptados: el método del equilibrio que, como su nombre lo indica, se basa en el equilibrio de los segmentos de losa resultantes estudiados para las cargas aplicadas, los momentos a lo largo de las líneas de fluencia y las reacciones en los apoyos, y el método de los trabajos virtuales, que se basa en la relación existente entre el trabajo externo que produce un pequeño aumento en las cargas y sus correspondientes deformaciones, y el trabajo interno efectuado por la losa, es decir, una relación entre las cargas y los momentos resistentes.

Como ya se anotó, el presente texto se limita a hacer las breves referencias anteriores, con un modelo de aplicación utilizando las tablas anexas al texto publicado por la Universidad Nacional, Introducción al análisis plástico de estructuras de concreto reforzado, del profesor Enrique Kerpel K., con la advertencia del mismo autor en el sentido de que las soluciones allí tabuladas corresponden a una de las múltiples soluciones correctas del problema propuesto. Como modelos, se utilizarán los problemas 7.1 y 7.2 antes estudiados.

Problema 7.3

Resolver el problema 7.1 utilizando el método de las líneas de fluencia.

Solución

Se utiliza el mismo predimensionamiento con un espesor de t = 0.21 m y, por consiguiente, la misma carga q = 8.31 kN/m^2. Para entrar a las tablas mencionadas se calcula el valor de k:

$k = \frac{7.85}{8.70} = 0.9023$. Con este valor y en la tabla para el Caso 2, al cual se asimila el panel que se diseñó, se obtiene:

$qk^2L^2 = 512.08$

$\frac{m}{qk^2L^2} = 0.02349$; $m = 12.03$; $\frac{m'_3 = m'_4}{qk^2L^2} = -0.03398$; $m'_3 = m'_4 = -17.40$

$\frac{\mu m}{qk^2L^2} = 0.01381$ $\mu m = 7.07$; $\frac{m'_1 = m'_2}{qk^2L^2} = -0.02001$; $m'_1 = m'_2 = -10.25$

Diseño sentido kL:

Constantes para diseño: b = 1.00; d = 0.18; ϕM_n (máx) = 183.8 kN·m

	②		③
M (kN·m) =	17.40	12.03	17.40
$\phi M_n = 1.5M$ =	26.10	18.04	26.10
ρ =	0.003829	0.002626	0.003829
A_s (m^2/m) =	0.000689	0.000473	0.000689
A_s mínimo =	0.0020*1.0*0.21 = 0.000420 m^2/m		
ϕ Superior:	ϕ 1/2" c/0.18 (46)		ϕ 1/2" c/0.18 (46)
ϕ Inferior:	ϕ 3/8" c/0.15	ϕ 3/8" c/0.15 (55)	ϕ 3/8" c/0.15

Diseño sentido L:

Constantes para diseño: b = 1.00; d = 0.17; ϕM_n (máx) = 163.9 kN·m

	Ⓑ		Ⓒ
M (kN-m) =	10.25	7.07	10.25
ϕM_n =1.5M =	15.38	10.60	15.38
ρ =	0.002508	0.001720	0.002508
A_s (m^2/m) =	0.000426	0.000292	0.000426
A_s mínimo =	0.0020*1.00*0.21 = 0.00042 m^2/m		
ϕ Superior:	ϕ 3/8" c/0.165 (45)		ϕ 3/8" c/0.165 (45)
ϕ Inferior:	ϕ 3/8" c/0.165	ϕ 3/8" c/0.165 (45)	ϕ 3/8" c/0.165

Posición de las líneas de fluencia y esfuerzo cortante

A partir de los momentos, se obtiene la posición exacta de las líneas de fluencia positivas en el panel bajo consideración y además las cargas que van a los diferentes apoyos a partir de las cuales se podría diseñar para esfuerzo cortante. Las ecuaciones de equilibrio deducidas en el texto mencionado son:

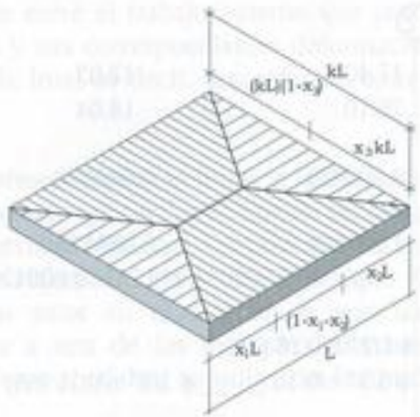


Figura 7.9

$$x_1 = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{6}{q}(\mu m + m_1')} = x_2$$

$$x_1 = \frac{1}{8.70}\sqrt{\frac{6}{8.31}(7.07 + 10.25)} = 0.4069$$

$$\therefore\ x_1 L = x_2 L = 3.54\ \text{m}$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{m + m_3'}}{\sqrt{m + m_3'} + \sqrt{m + m_4'}},$$ que para este caso resulta:

$$x_3 = 0.5$$

$$\therefore\ x_3 kL = 3.925\ \text{m}$$

Por tanto, y aunque se desconoce la exacta distribución del corte, se comprueba la fuerza cortante para el caso que pudiera ser el más desfavorable.

V máximo	= 3.925*8.31 = 32.62 kN
V borde	= 31.37 kN
V_u = 1.5V borde	= 47.06 kN

$$\phi V_c = \phi * 0.17\sqrt{f_c'}\, b_w d * 1000$$

$$\phi V_c = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 1.00 * 0.18 * 1000 = 105.34\ \text{kN}$$

A continuación se detalla el refuerzo correspondiente a este problema:

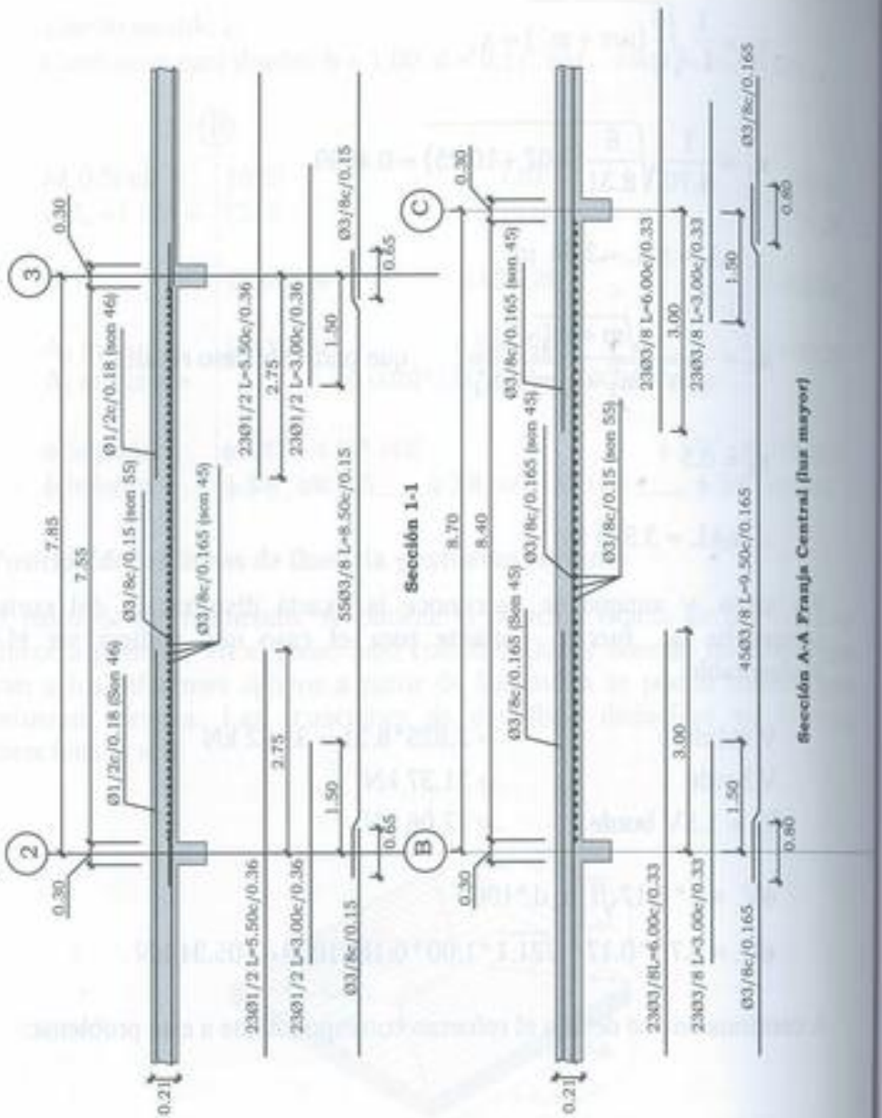


Figura 7.10

Problema 7.4

Resolver el problema 7.2 utilizando el método de las líneas de fluencia.

Solución

Se utiliza el mismo predimensionamiento y distribución del problema 7.2 con un espesor de t = 0.35 m y la misma carga q = 7.21 kN/m^2.

Para entrar a las tablas mencionadas se emplea el mismo valor de k = 0.9023 del problema 7.3 y en la tabla para el caso 2 se obtiene:

$$qk^2L^2 = 444.30$$

$$\frac{m}{qk^2L^2} = 0.02349;\ m = 10.44;\ \frac{m'_3 = m'_4}{qk^2L^2} = -0.03398;\ m'_3 = m'_4 = -15.10$$

$$\frac{\mu m}{qk^2L^2} = 0.01381;\ \mu m = 6.14;\ \frac{m'_1 = m'_2}{qk^2L^2} = -0.02001;\ m'_1 = m'_2 = -8.89$$

Diseño sentido kL:

Constantes para diseño: b = 0.10; d = 0.32; ϕM_n (máx) = 50.3 kN·m

	②		③
M (kN·m) =	15.10	10.44	15.10
M/vta = 0.85M	12.84	8.87	12.84
ϕM_n = 1.5M =	19.26	13.31	19.26
ρ =	0.005309	0.003593	0.005309
A_s (m^2) =	0.000169	0.000115	0.000169
ϕ Superior:	1 ϕ 1/2" + 1ϕ 3/8"		1ϕ 1/2" + 1 ϕ 3/8"
ϕ Inferior:	1ϕ 1/2"	1ϕ 1/2"	1ϕ 1/2"

Diseño sentido L:
Constantes para diseño: b = 0.10; d = 0.31; ϕM_n (máx) = 47.2 kN·m

	②		③
M (kN·m) =	8.89	6.14	8.89
M/vta = 0.85M	7.56	5.22	7.56
ϕM_n = 1.5M =	11.34	7.83	11.34
ρ =	0.003248	0.002281 (mín = 0.0033)	0.003248
A_s (m^2) =	0.000102	0.000102	0.000102
ϕ Superior:	1ϕ 1/2"		1ϕ 1/2"
ϕ Inferior:	1ϕ 1/2"	1ϕ 1/2"	1ϕ 1/2"

Posición de las líneas de fluencia y fuerza cortante

De igual manera que en el problema 7.3, a partir de los momentos se obtiene la posición exacta de las líneas de fluencia positivas en el panel bajo consideración y además las cargas que van a los diferentes apoyos a partir de las cuales se podría diseñar para fuerza cortante. Los resultados allí obtenidos corresponden a la figura 7.11.

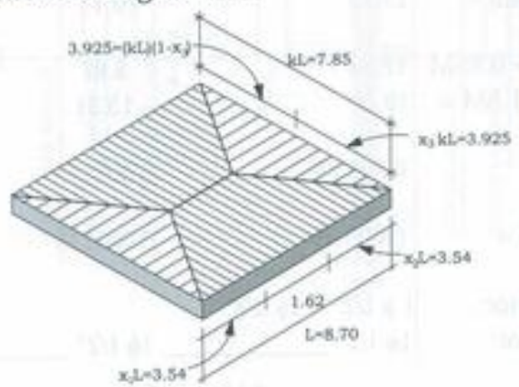


Figura 7.11

$$x_1 = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{6}{q}(\mu m + m_1')} = x_2$$

$$x_1 = \frac{1}{8.70}\sqrt{\frac{6}{7.21}(6.14 + 8.89)} = 0.4069$$

$x_1L = x_2L = 3.54$ m

$x_3kL = 3.925$ m

Por tanto, y con la misma observación del problema anterior sobre el desconocimiento de la exacta distribución del corte, se diseña el esfuerzo cortante para el caso que pudiera ser el más desfavorable en cada sentido y como una muestra del límite superior en la colocación del refuerzo correspondiente.

	②	③
V (kN) =	3.925*0.85*7.21 = 24.05	24.05
V borde (kN) =	23.13	23.13
V_u = 1.5V	34.70	34.70
ϕV_c =	18.73	18.73
$V_u - \phi V_c$ =	15.97	15.97
S (m) =	1.69	1.69
Estribos:	13 ε ϕ ¼ " c/0.15 + ε ϕ ¼ " c/0.35 hasta donde exista refuerzo superior	ídem

	Ⓑ	Ⓒ
V (kN) =	3.54*0.85*7.21 = 21.69	21.69
V borde (kN) =	20.77	20.77
$V_u = 1.5V$	31.16	31.16
ϕV_c =	18.14	18.14
$V_u - \phi V_c$ =	13.02	13.02
S (m) =	1.48	1.48
Estribos:	11 ε ϕ 1/4"c/0.15 + ε ϕ 1/4" c/0.35 hasta donde exista refuerzo superior	ídem

A continuación se detalla el refuerzo correspondiente:

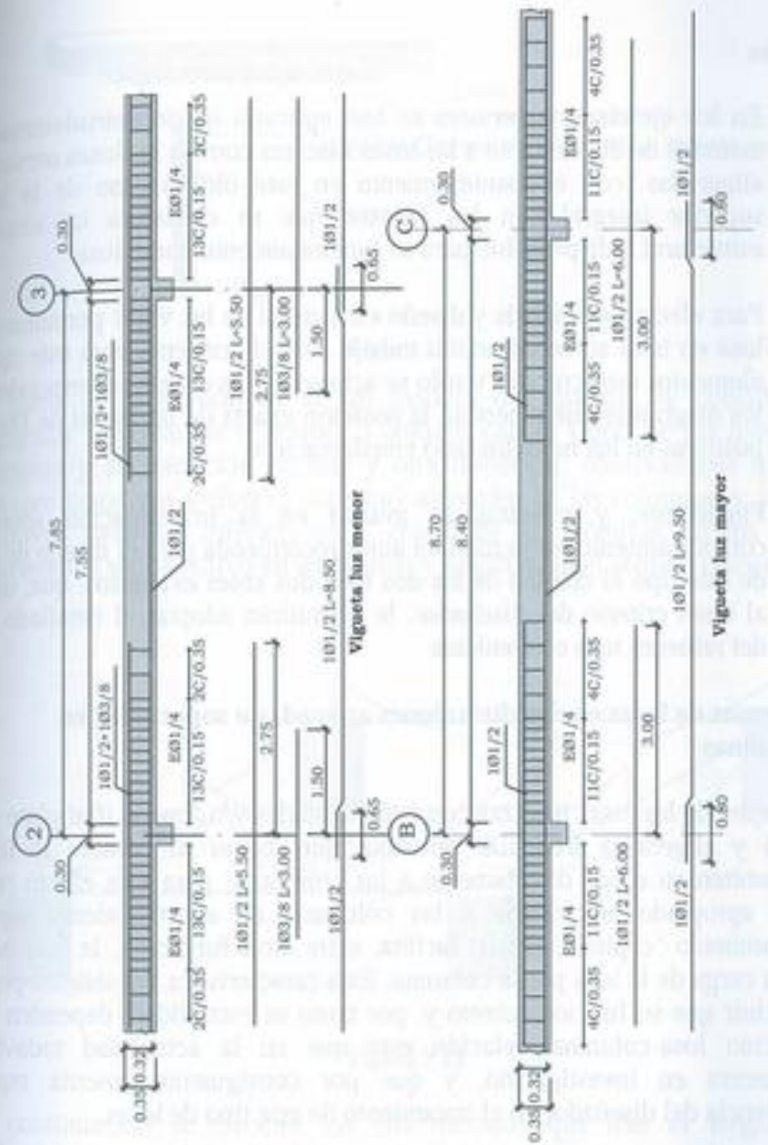


Figura 7.12

Notas

1. En los ejercicios anteriores se han aplicado indiscriminadamente los métodos de diseño tanto a las losas macizas como a las losas nervadas o aligeradas, con el mantenimiento en este último caso de la loseta superior integral con los nervios que se considera un elemento estructural indispensable para su funcionamiento como losa.

2. Para efecto del análisis y diseño estructural de las vigas portantes de la losa en todo su contorno, su trabajo será el corriente para este tipo de elementos estructurales y solo se aclara que las cargas corresponderán a los diagramas que muestran la posición exacta de las líneas de fluencia positivas en los módulos bajo consideración.

3. Finalmente, y mientras se avanza en la investigación sobre su comportamiento estructural, el autor recomienda para el diseño de losas de este tipo el empleo de los dos métodos antes expuestos, que, unidos al buen criterio del diseñador, le permitirán adoptar el detallado final del refuerzo más conveniente.

Sistemas de losas en dos direcciones apoyadas o soportadas en columnas

Comprende las losas macizas con o sin capiteles y/o ábacos (flat plate y flat slab) y aligeradas (reticular celulado) que, como su nombre lo indica, transmiten su carga directamente a las columnas; para este efecto resulta más apropiado adicionarle a las columnas un engrosamiento superior denominado "capitel", el cual facilita, entre otras funciones, la "captación" de la carga de la losa por la columna. Esta característica del sistema permite concluir que su funcionamiento y, por tanto su estabilidad, dependen de la relación losa-columna, relación esta que en la actualidad todavía se encuentra en investigación, y que por consiguiente amerita especial prudencia del diseñador en el tratamiento de este tipo de losas.

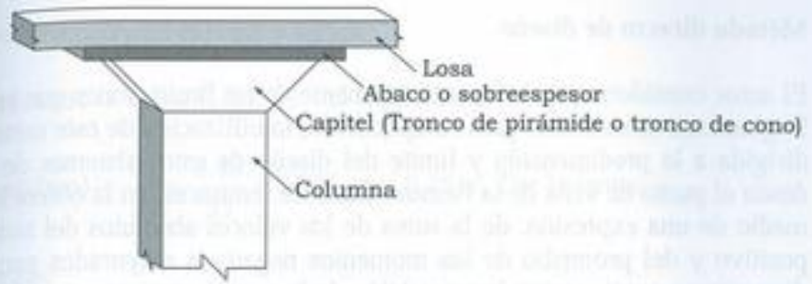


Figura 7.13

A partir de la deformada de un módulo del sistema, se considera de particular importancia el esquema adjunto con el signo de los momentos flectores y su variación en una y otra dirección, observándose que son siempre negativos (refuerzo superior) alrededor de las columnas y siempre positivos (refuerzo inferior) en el centro de los módulos; en los puntos intermedios será positivo en un sentido y negativo en el sentido ortogonal.

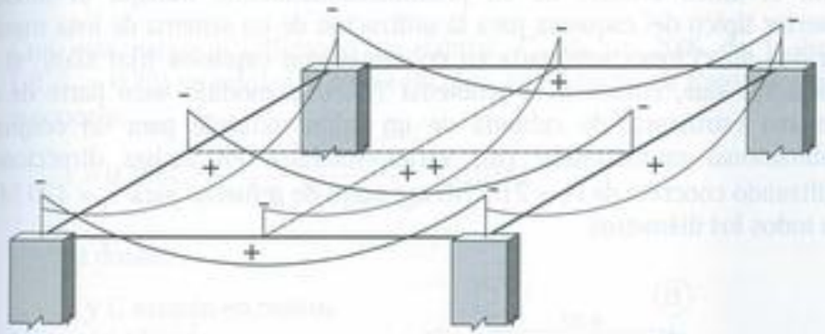


Figura 7.14

A continuación se tratarán los dos métodos que trae el Reglamento colombiano para el diseño de estos sistemas de losas, en su orden: método directo de diseño y método del pórtico equivalente, con algunas limitaciones y variaciones que debe tener su utilización.

Método directo de diseño

El autor considera que, independientemente de las limitaciones que exige el Reglamento colombiano para su aplicación, la utilización de este método va dirigida a la predimensión y límite del diseño de estos sistemas de losas, desde el punto de vista de la flexión. Consiste, entonces, en la obtención por medio de una expresión, de la suma de los valores absolutos del momento positivo y del promedio de los momentos negativos mayorados para cada dirección; a continuación la repartición de la suma antes mencionada por el sistema de coeficientes en momentos mayorados positivos y negativos, y finalmente la distribución por tablas de los momentos mayorados negativos y positivos para ser resistidos por las zonas denominadas franjas de columnas o viguetas de capitel y franjas o viguetas centrales, cuyos anchos y demás especificaciones necesarias para su utilización se detallarán en los modelos correspondientes.

Problema 7.5

Con el único alcance de un predimensionamiento, trabajar el módulo interior típico del esquema para la utilización de un sistema de losa maciza en dos direcciones soportada en columnas con capiteles (flat slab), si se considera que, como en el problema 7.1, este módulo hace parte de un sistema estructural de cubierta de un salón múltiple para un conjunto habitacional multifamiliar con varios módulos en ambas direcciones, utilizando concreto de $f'_c = 21.1$ MPa y acero de refuerzo para $f_y = 420$ MPa en todos los diámetros.

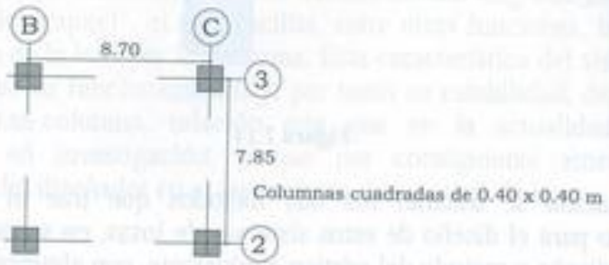


Figura 7.15

1. Predimensión del espesor y cargas:

Utilizando la Tabla C.9.5 (c) del Reglamento:

$$t\ (\text{mínimo}) = \frac{\ell_n}{33} = \frac{8.40}{33} = 0.255\ \text{m} \sim 0.25\ \text{m}.$$ Por lo tanto:

Cargas:

Peso propio de la losa:	0.25*1.00*1.00*24	=	6.00 kN/m^2
Alistado y desniveles:	0.04*1.00*1.00*22	=	0.88 kN/m^2
Impermeabilización:		=	0.15 kN/m^2
Afinado cielo raso:	0.02*1.00*1.00*22	=	0.44 kN/m^2
Sub total carga muerta:		=	7.47 kN/m^2
Carga viva:		=	1.80 kN/m^2
Total:		=	9.27 kN/m^2

Con esta carga y utilizando un capitel, C, de un 20% de la luz L(C/L = 0.20) se emplea la siguiente guía, proveniente de Reglamentos anteriores:

$$t = 0.106L\left(1 - \frac{2}{3}\frac{C}{L}\right)\sqrt{\frac{w}{f'_c + 141}} + 0.0381$$

en donde:

L y C estarán en metros
w en kN/m^2
f'_c en kN/m^2
t en metros

$$\therefore\ t = 0.106 * 8.70 * \left(1 - \frac{2}{3} * 0.20\right)\sqrt{\frac{9.27}{21100/141}} + 0.0381$$

$$t = 0.237\text{m} \sim 0.24\ \text{m}$$

Se adopta en forma preliminar un espesor de 0.25 m.

2. Esfuerzo cortante

Se procede en segundo término, y antes de aplicar el método directo, al chequeo del esfuerzo cortante porque en el caso de que los resultados del mismo no sean satisfactorios, la solución sería cambiar la sección y este cambio se debería acometer antes del estudio de la flexión.

Chequeo a "d/2" del borde del capitel "como losa en dos direcciones":

Asumiendo d = 0.21 m y un capitel de 1.75 x 1.60 en forma de tronco de pirámide, resulta (véase figura 7.16.a):

$$V = 9.27*8.70*7.85 - 9.27*1.96*1.81 = 600.20 \text{ kN}$$

$$V_u = 1.5*600.20 = 900.30 \text{ kN}$$

ϕV_c debe ser el menor de:

$$\text{(a) } \phi V_c = \phi*0.17*\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\sqrt{f'_c}\,b_o d$$

donde β= es la relación del lado largo al lado corto de la columna, la carga concentrada o el área de reacción y b_o es el perímetro de la sección crítica para cortante:

$$\phi V_c = 0.75*0.17*\left(1+\frac{2}{1.96\div1.81}\right)\sqrt{21.1}*7.54*0.21*1000$$

$$\phi V_c = 2640.9 \text{ kN}$$

$$\text{(b) } \phi V_c = \phi*0.083*\left(\frac{\alpha_s d}{b_o}+2\right)\sqrt{f'_c}\,b_o d$$

donde α_s es 40 para columnas interiores, 30 para columnas de borde y 20 para columnas esquineras:

$$\phi V_c = 0.75*0.083*\left(\frac{40*0.21}{7.54}+2\right)\sqrt{21.1}*7.54*0.21*1000$$

$$\phi V_c = 1407.03 \text{ kN}$$

$$\text{(c) } \phi V_c = \phi*0.33*\sqrt{f'_c}\,b_o d = 0.75*0.33*\sqrt{21.1}*7.54*0.21*1000$$

$$\phi V_c = 1798.78 \text{ kN}$$

Por lo tanto $\phi V_c > V_u$

Chequeo a "d" del borde del capitel "como viga":

$$V = 1/2*8.70*9.27 - (0.875 + 0.21)*9.27 = 30.26 \text{ kN}$$

$$V_u = 1.5*30.26 = 45.39 \text{ kN}$$

$$\phi V_c = \phi*0.17\sqrt{f'_c}\,b_o d = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*1.00*0.21*1000$$

$$\phi V_c = 122.90 \text{ kN}$$

3. Flexión

Con el alcance del enunciado, se estudia la flexión por medio de la expresión del Reglamento a partir de la cual se obtiene "la suma de los valores absolutos del momento positivo y del promedio de los momentos negativos mayorados"; para este caso únicamente en la dirección de la luz mayor, por tratarse de sólo una predimensión:

$M_o = \frac{q_u \ell_2 \ell_n^2}{8}$ en donde:

M_o = momento estático mayorado total;

q_u = carga mayorada por unidad de área;

ℓ_2 = longitud de la luz transversal a ℓ_1, medida centro a centro de apoyos;

ℓ_n = longitud de la luz libre en la dirección en la cual se determinan los momentos, medida cara a cara de los apoyos, columnas, capiteles, ménsulas o muros.

Teniendo en cuenta que la predimensión corresponde a un diseño en el cual se deben considerar cargas gravitacionales y además cargas de sismo, se recomienda una variación al significado de ℓ_n, tomándola como la distancia entre las intersecciones de la línea central de la losa con la diagonal a 45° que pasa por el punto de unión entre la columna y el borde inferior de la losa (figura 7.16.b).

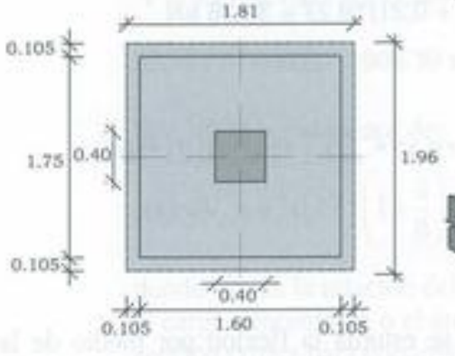


Figura 7.16.a

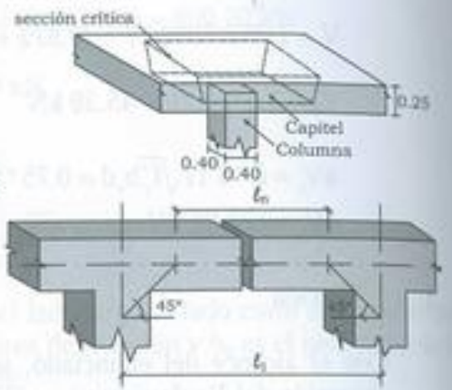


Figura 7.16.b

De todas maneras, este valor de ℓ_n no debe ser menor que $0.65\ell_1$.

Por tanto:

$$q_u = 1.5 * 9.27 = 13.91 \text{ kN/m}^2$$

$$\ell_2 = 7.85 \text{ m}$$

$$\ell_n = 8.70 - 2 * 0.325 = 8.05 \text{ m}$$

$$\therefore M_o = \frac{13.91 * 7.85 * 8.05^2}{8} = 884.50 \text{ kN·m}$$

Este momento estático total M_o debe distribuirse como sigue:

Momento mayorado negativo: 0.65*884.50 = 574.93 kN·m
Momento mayorado positivo: 0.35*884.50 = 309.57 kN·m

A su vez, estos momentos deben ser resistidos por las denominadas franjas de columnas y franjas centrales, que para el caso de la losa maciza en consideración corresponden al esquema de la figura.

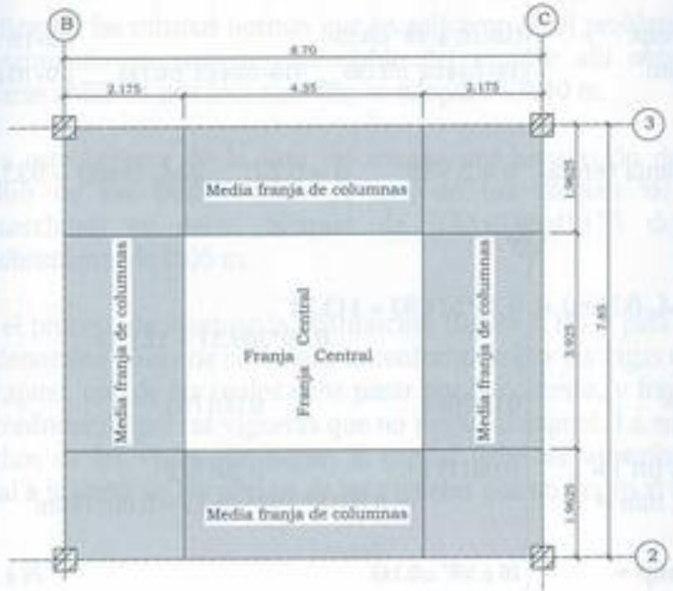


Figura 7.17

Para la franja de columnas las porciones de momentos mayorados negativos y positivos corresponden a los porcentajes establecidos en la Tabla C.13.6.4 del Reglamento colombiano. El resto de los momentos mayorados negativos y positivos se le adjudican a la franja central.

Franjas de columnas: b = 3.925; d = 0.21; ϕM_n (máx) = 850.7 kN·m

	Ⓑ		Ⓒ
ϕM_n (kN·m) =	0.75*574.93 = 431.20	0.60*309.57 = 185.74	431.20
ρ =	0.007201	0.002941	0.007201
A_s (m^2) =	0.005935	0.002424	0.005935
ϕ sup:	(15+15) ϕ 5/8" c/0.13		(15+15) ϕ 5/8" c/0.13
ϕ inf:	(10+10)ϕ1/2"c/0.195	(10+10)ϕ1/2"c/0.195	(10+10)ϕ1/2"c/0.195

Franja central: b = 3.925; d = 0.22; ϕM_n (máx) = 933.6 kN·m

	Ⓑ		Ⓒ
ϕM_n (kN·m) =	0.25*574.93 = 143.73	0.40*309.57 = 123.83	143.73
ρ =	0.002052	0.001763	0.002052
A_s (m^2) =	0.001771	0.001522	0.001771
A_s mín =	0.0018*3.925*0.25 = 0.001766m^2		
ϕ sup =	26 ϕ 3/8" c/0.145		26 ϕ 3/8" c/0.145
ϕ inf =	25 ϕ 3/8" c/0.15	25ϕ 3/8" c/0.15	25 ϕ 3/8" c/0.15

Al término de la predimensión se concluye que el espesor de losa adoptado es apropiado ya que funciona correctamente la fuerza cortante, y por flexión la armadura positiva de la franja central resulta muy próxima a la armadura mínima; sin embargo, se debe tener en cuenta que la predimensión se trabajó únicamente en el sentido de la luz mayor.

Problema 7.6

También con el único alcance de un predimensionamiento, solucionar el problema 7.5 para la utilización de un sistema de losa en dos direcciones, aligerada con bloques de concreto, soportada en columnas (reticular celulado) con los mismos materiales allí especificados.

1. Predimensión del espesor y cargas

Utilizando las mismas normas que se aplicaron en el problema anterior y estimando un aumento apreciable del espesor allí obtenido, por tratarse ahora de una losa nervada, se adopta t = 0.40 m.

Para este espesor de la losa, se escoge una separación de viguetas dentro de las posibilidades de uso de los bloques de concreto comerciales, es decir, bloques de 0.85x0.85x0.175 dejando un recubrimiento de 0.05 m.

En el proceso de efectuar la distribución (figura 7.18) y para el diseño, se denomina franja de columnas la conformada por las vigas que llegan al capitel, una de las cuales debe pasar por la columna, y franja central la conformada por las viguetas que no llegan al capitel. La suma de los anchos de las vigas que llegan al capitel debe ser aproximadamente igual a la suma de los anchos de las viguetas que no llegan al capitel.

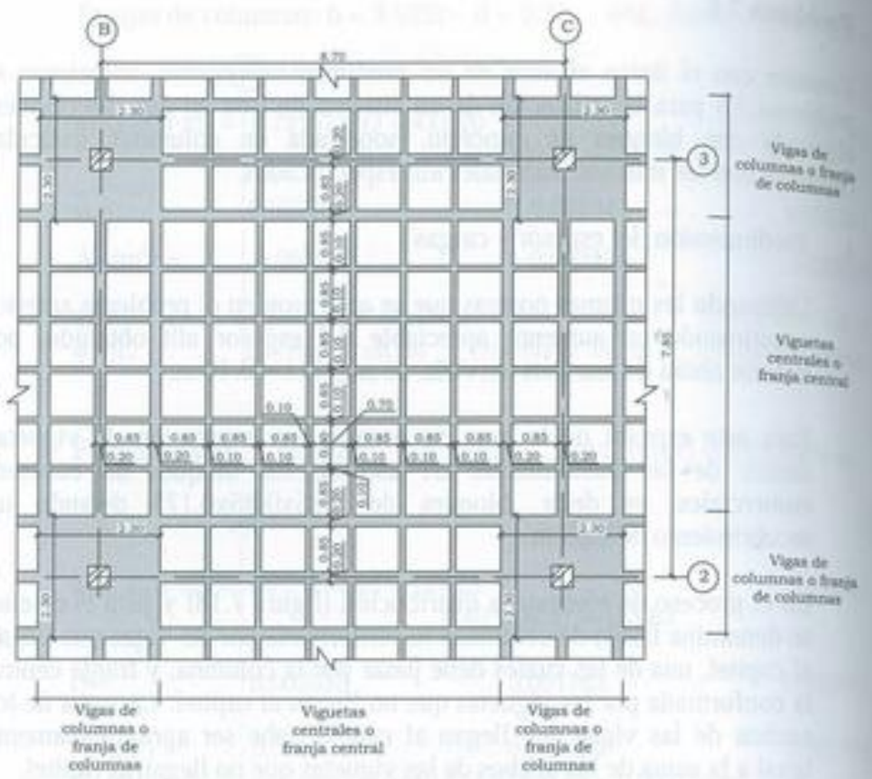


Figura 7.18

Distribución de bloques y viguetas en el sentido B-C:

3 viguetas de capitel x 0.20 m	=	0.60 m
5 viguetas centrales x 0.10 m	=	0.50 m
7 bloques de 0.85 x 0.85 x 0.175 (tapa y fondo)	=	5.95 m
1 bloque de 0.80 x 0.85 x 0.175 (tapa y fondo)	=	0.80 m
Total	=	7.85 m

Distribución de bloques y viguetas en el sentido 2-3:

3 viguetas de capitel x 0.20 m	=	0.60 m
6 viguetas centrales x 0.10 m	=	0.60 m
8 bloques de 0.85 x 0.85 x 0.175 (tapa y fondo)	=	6.80 m
1 bloque de 0.70 x 0.85 x 0.175 (tapa y fondo)	=	0.70 m
Total	=	8.70 m

Peso total del módulo:

$[8.70*7.85*0.40-(56-4)*0.81*0.81*0.31-8*0.76*0.81*0.31-7*0.66*0.81*0.31-1*0.66*0.76*0.31]*24 = 333.36$ kN

Por tanto:

Cargas:

Peso propio de la losa:	333.36 / (8.70*7.85)	=	4.88 kN/m^2
Alistado y desniveles:	0.04*1.00*1.00*22	=	0.88 kN/m^2
Impermeabilización:		=	0.15 kN/m^2
Afinado cielo-raso:	0.02*1.00*1.00*22	=	0.44 kN/m^2
Subtotal carga muerta:		=	6.35 kN/m^2
Carga viva:		=	1.80 kN/m^2
Total:		=	8.15 kN/m^2

2. Fuerza cortante

Por las mismas razones expuestas en el problema anterior, se procede en segundo término a la revisión de la fuerza cortante.

Chequeo a "d/2" del borde del capitel "como losa en dos direcciones":

A partir de un capitel de 2.30 x 2.30 y asumiendo d = 0.35 m, resulta:

$$V = 8.15*8.70*7.85 - 8.15*(2.65*2.65) = 499.37 \text{ kN}$$

$$V_u = 1.5*499.37 = 749.06 \text{ kN}$$

Para el caso de capiteles cuadrados, el cortante debido a las cargas ultimas en losas sometidas a flexión en las dos direcciones está limitado por:

$$\phi V_c = \phi*0.33*\sqrt{f'_c}\,b_o d = 0.75*0.33*\sqrt{21.1}*12*0.20*0.35*1000$$
$$\phi V_c = 954.26 \text{ kN}$$

Por lo tanto $\phi V_c > V_u$

Chequeo a "d" del borde de la columna "como viga":

$$V = \frac{1}{2}*8.70*8.15*7.85 - \left(\frac{0.40}{2}+0.35\right)*8.15*7.85 = 243.11 \text{ kN}$$

$$V_u = 1.5*243.11 = 364.67 \text{ kN}$$

$$\phi V_c = \phi*0.17*\sqrt{f'_c}\,b_w d = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*12*0.20*0.35*1000$$
$$\phi V_c = 491.59 \text{ kN}$$

Por lo tanto $\phi V_c > V_u$, lo cual significa que es manejable y esto es lo que se pretende demostrar en un análisis con el sólo alcance de una predimensión.

3. Flexión:

Utilizando el mismo procedimiento del problema anterior, resulta:

$M_o = \frac{q_u \ell_2 \ell_n^2}{8}$, en donde:

$q_u = 1.5*8.15 = 12.23 \text{ kN/m}^2$

$\ell_2 = 7.85$ m

$\ell_n = 8.70 - 2*0.40 = 7.90$ m

$\therefore M_o = \frac{12.23*7.85*7.90^2}{8} = 748.96$ kN·m, el cual se distribuye así:

Momento mayorado negativo: 0.65*748.96 = 486.82 kN·m
Momento mayorado positivo: 0.35*748.96 = 262.14 kN·m

A su vez, estos momentos deben ser resistidos por las denominadas franjas de columnas y franjas centrales, que para el caso de la losa aligerada (reticular celulado) se consideran correspondientes a las vigas o viguetas de capitel y a las viguetas centrales respectivamente. Por tanto:

Franjas de columnas:

Constituida por 3 vigas de capitel de b = 0.20, d = 0.33 y 0.35, d' = 0.05 y ϕM_n (máx) = 94.20 kN·m respectivamente

	Ⓑ		Ⓒ
ϕM_n (kN·m) =	1/3*0.75*486.82 = 121.71	1/3*0.60*262.14 = 52.43	121.71
ρ =		0.006099	
ΔM (kN·m) =	27.51		27.51
A_{s1} (m^2) =	0.000899		0.000899
A_{s2} (m^2) =	0.000260		0.000260
A_s total =	0.001159 m^2	0.000427 m^2	0.001159 m^2
ϕ sup:	1ϕ1"+2ϕ7/8"	2ϕ1/2"	1ϕ1"+2ϕ7/8"
ϕ inf:	1ϕ3/4"+1ϕ5/8"	1ϕ3/4"+1ϕ5/8"	1ϕ3/4"+1ϕ5/8"

Franja central:
Constituida por 5 viguetas centrales de b = 0.10, d = 0.36 y ϕM_n (máx) = 56.05 kN·m

	Ⓑ		Ⓒ
ϕM_n (kN·m) =	1/5*0.25*486.82 = 24.34 1/5*0.40*262.14 = 20.97		24.31
ρ =	0.005301	0.004524	0.005301
A_s (m^2) =	0.000191	0.000163	0.000191
ϕ sup:	1ϕ1/2" + 1ϕ3/8"		1ϕ1/2" + 1ϕ3/8"
ϕ inf:	1ϕ1/2"	1ϕ1/2" + 1ϕ3/8"	1ϕ1/2"

Al término de la predimensión se concluye que tanto el espesor de la losa como los anchos adoptados de los elementos son apropiados, no solamente por las revisiones del esfuerzo cortante, sino porque permiten una colocación correcta del posible refuerzo por flexión. Sin embargo, como en el caso de la losa maciza, puede completarse la predimensión trabajándola también en el sentido de la luz menor y de esta manera tener una visión más amplia sobre la conveniencia de las secciones y de las cuantías o cantidades de refuerzo así como del mayor o menor grado de dificultad en su construcción.

Método de diseño del pórtico equivalente

Consiste en la consideración de la estructura constituida por pórticos equivalentes tomados longitudinal y transversalmente en el edificio sobre los ejes de las columnas; cada pórtico está conformado por una fila de columnas o apoyos equivalentes y franjas de losa-viga limitadas lateralmente por la línea central de la losa a cada lado del eje de las columnas o apoyos. Debe suponerse que las columnas o apoyos estén unidos en la franja de viga-losa mediante elementos torsionales transversales a la dirección del vano para el cual se esta determinando los momentos extendiéndose hasta los ejes centrales a los paneles adyacentes a

cada lado de la columna. El momento de inercia de las vigas-losa en cualquier sección transversal fuera de los nudos o capiteles de columna se tomará como el correspondiente al área bruta de concreto; el momento de inercia de las vigas-losa desde el centro de la columna hasta la cara de la columna, ménsula o capitel se tomará igual al momento de inercia en la cara de la columna, ménsula o capitel, dividido por la cantidad $(1- c_2/\ell_2)^2$ donde c_2 y ℓ_2 se miden transversalmente a la dirección de la luz para la cual se determinan los momentos. Respecto de las columnas, su momento de inercia en cualquier sección localizada fuera de los nudos o capiteles se tomará como el correspondiente al área bruta de concreto; el momento de inercia de la columna dentro de la viga-losa puede suponerse como infinito. Una vez obtenidos los momentos de las secciones críticas de la viga-losa para cada pórtico, se distribuirán para la franja o vigas de columnas y para la franja o viguetas centrales utilizando los porcentajes establecidos en las secciones C.13.6.4, C.13.6.5, C.13.6.6, del Reglamento si se cumple con los requisitos de C.13.6.1.6.

Respecto de las secciones críticas se sugiere una variación para los momentos mayorados negativos los cuales no se tomen en el borde de los apoyos rectilíneos, sino a una distancia del eje de la columna obtenida como la intersección de la línea central de la losa con la diagonal a 45° que pasa por el punto de unión entre la columna y el borde inferior de la losa, pero a no más de $0.175\ell_1$, medido desde el centro de la columna, donde ℓ_1 es la distancia entre ejes de columnas (figura 7.19).

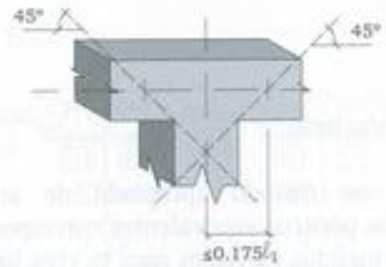


Figura 7.19

A continuación un ejemplo de aplicación de lo anteriormente expuesto.

Problema 7.7

Diseñar el módulo interior típico del esquema correspondiente al problema 7.5 para la utilización de un sistema de losa maciza en dos direcciones soportada en columnas con capiteles (flat slab), si se considera que hace parte de una estructura de cubierta de un salón múltiple para un conjunto habitacional multifamiliar con tres módulos en ambas direcciones, utilizando concreto de $f'_c = 21.1$ MPa y acero de refuerzo para $f_y = 420$ MPa en todos los diámetros, y suponiendo que se utilizará un sistema estructural de pórticos con capacidad moderada de disipación de energía (DMO) en una zona de amenaza sísmica intermedia.

Solución

Se utiliza la predimensión del problema 7.5 con el mismo espesor de 0.25 m para el diseño por la aplicación del método del pórtico equivalente.

1) Cargas

Peso propio losa:	0.25*1.00*1.00*24	=	6.00 kN/m^2
alistado y desniveles:	0.04*1.00*1.00*22	=	0.88 kN/m^2
impermeabilización:		=	0.15 kN/m^2
afinado cieloraso:	0.02*1.00*1.00*22	=	0.44 kN/m^2
Sub total carga muerta:			7.47 kN/m^2
Carga viva:			1.80 kN/m^2
Total:			9.27 kN/m^2

2) Análisis estructural

Utilizando un método apropiado de análisis estructural, se procesan los pórticos equivalentes correspondientes a los ejes 2-3 y B-C con inercias variables para la viga-losa, de acuerdo con los esquemas siguientes:

Pórtico Ejes 2-3:

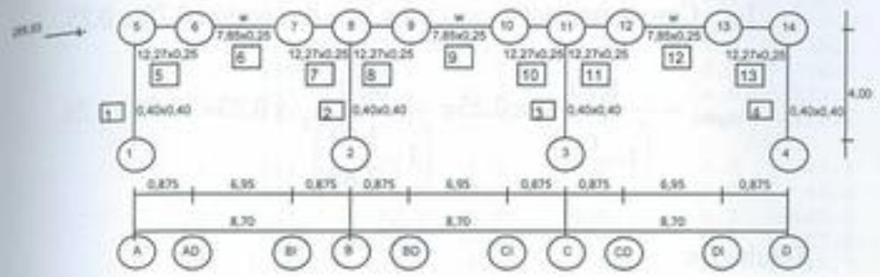


Figura 7.20

w = 9.27*7.85 = 72.77 kN/m

Inercia luz I_{luz}: Correspondiente a una viga-losa de sección 7.85x0.25

Inercia capitel

$$I_{capitel} = \frac{7.85}{\left(1-\frac{c_2}{\ell_2}\right)^2} \times 0.25 = \frac{7.85}{\left(1-\frac{1.75}{8.70}\right)^2} \times 0.25 = 12.27 \times 0.25$$

Pórtico Ejes B-C:

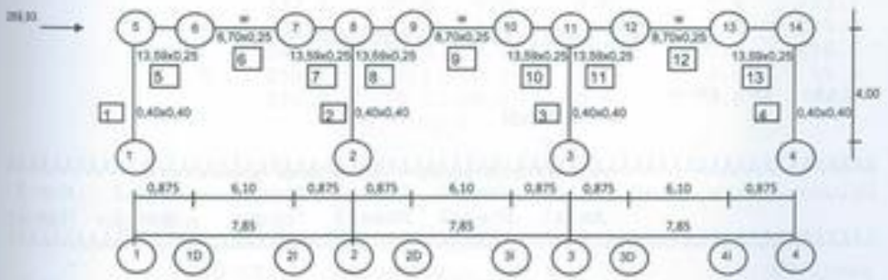


Figura 7.21

$$w = 9.27*8.70 = 80.65 \text{ kN/m}$$

I_{luz} : Correspondiente a una viga-losa de sección 8.70 x 0.25

$$I_{capitel} = \frac{8.70}{\left(1-\frac{c_2}{\ell_2}\right)^2} x\,0.25 = \frac{8.70}{\left(1-\frac{1.60}{7.85}\right)^2} x\,0.25 = 13.59 x\,0.25$$

Resultados:

```
Company: JORGE SEGURA FRANCO
Project: Estructuras de Concreto I-Prob7.7-Port 2y3     10:38:38
22-01-2011

3863863863863863863863863863863863863863863863863863863863863863
3863863863863863863863863863863863863863863863863863863863863863
3863863863863863863863863863863863863863863863863863863863863863
3863863863863863863863863863863863863863863863863863863863863863


L O A D   C O M B I N A T I O N S

                No      Load combination
               ÄÄÄÄÄÄ   ÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄ

                 1        OT
                 2        EQ
                 3      1.5OT
                 4      1.2OT + EQ
                 5      1.2OT - EQ


        þ Linear Analysis - Column End Forces

Units:  KN, KN-m
                        BOTTOM
                        TOP
ÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄ
Column   Stry  Load  Axial   Shear2  Shear3  Torque    Mom-2   Mom-3
                     Axial   Shear2  Shear3  Torque    Mom-2   Mom-3
ÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄ

2 - D     1     1   266.1    60.6     0.0     0.0       0.0    79.3
                    266.1    60.6     0.0     0.0       0.0  -155.4
```



```
                2    -24.3   -62.6     0.0     0.0       0.0  -130.5
                     -24.3   -62.6     0.0     0.0       0.0   112.1
                3    399.1    90.8     0.0     0.0       0.0   119.0
                     399.1    90.8     0.0     0.0       0.0  -233.0
                4    295.0    10.1     0.0     0.0       0.0   -35.3
                     295.0    10.1     0.0     0.0       0.0   -74.3
                5    343.6   135.3     0.0     0.0       0.0   225.7
                     343.6   135.3     0.0     0.0       0.0  -298.6

2 - C     1     1    683.6   -18.1     0.0     0.0       0.0   -23.8
                     683.6   -18.1     0.0     0.0       0.0    46.4
                2     11.7   -72.3     0.0     0.0       0.0  -143.3
                      11.7   -72.3     0.0     0.0       0.0   137.0
                3   1025.3   -27.1     0.0     0.0       0.0   -35.7
                    1025.3   -27.1     0.0     0.0       0.0    69.6
                4    831.9   -94.0     0.0     0.0       0.0  -171.8
                     831.9   -94.0     0.0     0.0       0.0   192.6
                5    808.6    50.6     0.0     0.0       0.0   114.8
                     808.6    50.6     0.0     0.0       0.0   -81.4

2 - B     1     1    683.6    18.1     0.0     0.0       0.0    23.8
                     683.6    18.1     0.0     0.0       0.0   -46.4
                2    -11.7   -72.3     0.0     0.0       0.0  -143.3
                     -11.7   -72.3     0.0     0.0       0.0   137.0
                3   1025.3    27.1     0.0     0.0       0.0    35.6
                    1025.3    27.1     0.0     0.0       0.0   -69.5
                4    808.6   -50.6     0.0     0.0       0.0  -114.8
                     808.6   -50.6     0.0     0.0       0.0    81.4
                5    831.9    94.0     0.0     0.0       0.0   171.8
                     831.9    94.0     0.0     0.0       0.0  -192.7

2 - A     1     1    266.1   -60.6     0.0     0.0       0.0   -79.3
                     266.1   -60.6     0.0     0.0       0.0   155.4
                2     24.3   -62.6     0.0     0.0       0.0  -130.5
                      24.3   -62.6     0.0     0.0       0.0   112.1
                3    399.1   -90.8     0.0     0.0       0.0  -119.0
                     399.1   -90.8     0.0     0.0       0.0   233.1
                4    343.6  -135.3     0.0     0.0       0.0  -225.7
                     343.6  -135.3     0.0     0.0       0.0   298.6
                5    295.0   -10.1     0.0     0.0       0.0    35.3
                     295.0   -10.1     0.0     0.0       0.0    74.3


        þ Linear Analysis - Beam End Forces

Units:  KN, KN-m

                END  I     X/L = 0.0                          M2(+)max
                END  J     X/L = 1.0
```

Beam	Floor	Load	Axl	Shr2	Shr3	Torque	M2	M3	M2	X/L
			Axl	Shr2	Shr3	Torque	M2	M3		
2(A-AD)	2	1	60.6	0.0	-251.5	0.0	-111.2	0.0	42.0	1.0
			60.6	0.0	-202.4	0.0	42.0	0.0		
		2	58.1	0.0	-24.3	0.0	-115.1	0.0	0.0	0.0
			58.1	0.0	-24.3	0.0	-98.7	0.0		
		3	90.8	0.0	-377.3	0.0	-166.7	0.0	63.1	1.0
			90.8	0.0	-303.6	0.0	63.1	0.0		
		4	130.8	0.0	-326.1	0.0	-248.5	0.0	0.0	1.0
			130.8	0.0	-267.2	0.0	-48.3	0.0		
		5	14.6	0.0	-277.5	0.0	-18.3	0.0	149.2	0.0
			14.6	0.0	-218.6	0.0	149.2	0.0		
2(AD-BI)	2	1	60.6	0.0	-202.4	0.0	42.0	0.0	323.5	0.4
			60.6	0.0	303.3	0.0	-308.7	0.0		
		2	17.6	0.0	-24.3	0.0	-98.7	0.0	70.0	1.0
			17.6	0.0	-24.3	0.0	70.0	0.0		
		3	90.8	0.0	-303.6	0.0	63.1	0.0	485.3	0.4
			90.8	0.0	455.0	0.0	-463.0	0.0		
		4	90.3	0.0	-267.2	0.0	-48.3	0.0	360.2	0.45
			90.3	0.0	339.7	0.0	-300.5	0.0		
		5	55.0	0.0	-218.6	0.0	149.1	0.0	422.6	0.35
			55.0	0.0	388.3	0.0	-440.4	0.0		
2(BI-B)	2	1	60.6	0.0	303.3	0.0	-308.7	0.0	0.0	0.0
			60.6	0.0	352.5	0.0	-530.0	0.0		
		2	-22.8	0.0	-24.3	0.0	70.0	0.0	86.3	1.0
			-22.8	0.0	-24.3	0.0	86.3	0.0		
		3	90.8	0.0	455.0	0.0	-463.1	0.0	0.0	0.0
			90.8	0.0	528.7	0.0	-795.0	0.0		
		4	49.9	0.0	339.7	0.0	-300.5	0.0	0.0	0.0
			49.9	0.0	398.7	0.0	-549.7	0.0		
		5	95.5	0.0	388.3	0.0	-440.4	0.0	0.0	0.0
			95.5	0.0	447.3	0.0	-722.3	0.0		
2(B-BD)	2	1	42.5	0.0	-302.0	0.0	-491.5	0.0	0.0	0.0
			42.5	0.0	-252.9	0.0	-304.2	0.0		
		2	40.5	0.0	-12.6	0.0	-52.3	0.0	0.0	0.0
			40.5	0.0	-12.6	0.0	-43.8	0.0		
		3	63.7	0.0	-453.0	0.0	-737.3	0.0	0.0	0.0
			63.7	0.0	-379.4	0.0	-456.3	0.0		
		4	91.4	0.0	-375.0	0.0	-642.1	0.0	0.0	0.0
			91.4	0.0	-316.1	0.0	-408.8	0.0		
		5	10.5	0.0	-349.8	0.0	-537.5	0.0	0.0	0.0
			10.5	0.0	-290.8	0.0	-321.2	0.0		

2(BD-CI)	2	1	42.5	0.0	-252.9	0.0	-304.2	0.0	135.2	0.5
			42.5	0.0	252.9	0.0	-304.2	0.0		
		2	0.0	0.0	-12.6	0.0	-43.8	0.0	43.8	1.0
			0.0	0.0	-12.6	0.0	43.8	0.0		
		3	63.7	0.0	-379.3	0.0	-456.3	0.0	202.7	0.5
			63.7	0.0	379.3	0.0	-456.3	0.0		
		4	51.0	0.0	-316.1	0.0	-408.9	0.0	162.2	0.5
			51.0	0.0	316.1	0.0	-260.4	0.0		
		5	51.0	0.0	-290.8	0.0	-321.2	0.0	162.2	0.5
			51.0	0.0	316.1	0.0	-408.9	0.0		
2(CI- C)	2	1	42.5	0.0	252.9	0.0	-304.2	0.0	0.0	0.0
			42.5	0.0	302.0	0.0	-491.5	0.0		
		2	-40.5	0.0	-12.6	0.0	43.8	0.0	52.3	1.0
			-40.5	0.0	-12.6	0.0	52.3	0.0		
		3	63.7	0.0	379.3	0.0	-456.3	0.0	0.0	0.0
			63.7	0.0	453.0	0.0	-737.3	0.0		
		4	10.5	0.0	290.8	0.0	-321.2	0.0	0.0	0.0
			10.5	0.0	349.8	0.0	-537.5	0.0		
		5	91.4	0.0	316.1	0.0	-408.8	0.0	0.0	0.0
			91.4	0.0	375.0	0.0	-642.1	0.0		
2(C-CD)	2	1	60.6	0.0	-352.5	0.0	-530.0	0.0	0.0	0.0
			60.6	0.0	-303.3	0.0	-308.7	0.0		
		2	22.8	0.0	-24.3	0.0	-86.3	0.0	0.0	0.0
			22.8	0.0	-24.3	0.0	-70.0	0.0		
		3	90.8	0.0	-528.7	0.0	-795.0	0.0	0.0	0.0
			90.8	0.0	-455.0	0.0	-463.0	0.0		
		4	95.5	0.0	-447.2	0.0	-722.4	0.0	0.0	0.0
			95.5	0.0	-388.3	0.0	-440.4	0.0		
		5	49.9	0.0	-398.7	0.0	-549.7	0.0	0.0	0.0
			49.9	0.0	-339.7	0.0	-300.5	0.0		
2(CD-DI)	2	1	60.6	0.0	-303.3	0.0	-308.7	0.0	323.5	0.6
			60.6	0.0	202.4	0.0	42.0	0.0		
		2	-17.6	0.0	-24.3	0.0	-70.0	0.0	98.7	1.0
			-17.6	0.0	-24.3	0.0	98.7	0.0		
		3	90.8	0.0	-455.0	0.0	-463.0	0.0	485.3	0.6
			90.8	0.0	303.6	0.0	63.1	0.0		
		4	55.0	0.0	-388.3	0.0	-440.4	0.0	422.6	0.65
			55.0	0.0	218.6	0.0	149.2	0.0		
		5	90.3	0.0	-339.7	0.0	-300.5	0.0	360.2	0.55
			90.3	0.0	267.2	0.0	-48.3	0.0		
2(DI- D)	2	1	60.6	0.0	202.4	0.0	42.0	0.0	42.0	0.0
			60.6	0.0	251.5	0.0	-111.2	0.0		
		2	-58.1	0.0	-24.3	0.0	98.7	0.0	115.1	1.0
			-58.1	0.0	-24.3	0.0	115.1	0.0		
		3	90.8	0.0	303.6	0.0	63.1	0.0	63.1	0.0
			90.8	0.0	377.3	0.0	-166.7	0.0		

4	14.6	0.0	218.6	0.0	149.2	0.0	149.2	0.0
	14.6	0.0	277.6	0.0	-18.3	0.0		
5	130.8	0.0	267.2	0.0	-48.3	0.0	0.0	0.0
	130.8	0.0	326.1	0.0	-248.5	0.0		

þ Linear Analysis - Support Reactions

Support		Load	Force (KN)			Moment (KN-m)		
Axis	Stry	LdComb	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
A	Ground	1	60.57	0.00	266.09	0.00	79.34	0.00
		2	62.62	0.00	24.27	0.00	130.53	0.00
		3	90.85	0.00	399.13	0.00	119.01	0.00
		4	135.30	0.00	343.57	0.00	225.74	0.00
		5	10.05	0.00	295.03	0.00	-35.32	0.00
B	Ground	1	-18.09	0.00	683.56	0.00	-23.75	0.00
		2	72.33	0.00	-11.66	0.00	143.28	0.00
		3	-27.14	0.00	1025.34	0.00	-35.63	0.00
		4	50.62	0.00	808.61	0.00	114.77	0.00
		5	-94.04	0.00	831.94	0.00	-171.78	0.00
C	Ground	1	18.09	0.00	683.56	0.00	23.75	0.00
		2	72.33	0.00	11.66	0.00	143.28	0.00
		3	27.14	0.00	1025.35	0.00	35.63	0.00
		4	94.04	0.00	831.94	0.00	171.78	0.00
		5	-50.62	0.00	808.61	0.00	-114.77	0.00
D	Ground	1	-60.57	0.00	266.09	0.00	-79.34	0.00
		2	62.62	0.00	-24.27	0.00	130.53	0.00
		3	-90.85	0.00	399.14	0.00	-119.01	0.00
		4	-10.05	0.00	295.03	0.00	35.32	0.00
		5	-135.30	0.00	343.57	0.00	-225.74	0.00

Company: JORGE SEGURA FRANCO
Project: Estructuras de Concreto I-Prob7.7-Port ByC 12:51:29
05-08-1999

390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390
390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390
390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390
390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390390

L O A D C O M B I N A T I O N S

No	Load combination
1	OT
2	EQ
3	1.5OT
4	1.2OT + EQ
5	1.2OT - EQ

þ Linear Analysis - Column End Forces

Units: KN, KN-m

BOTTOM
TOP

Column	Stry	Load	Axial Axial	Shear2 Shear2	Shear3 Shear3	Torque Torque	Mom-2 Mom-2	Mom-3 Mom-3
B - 4	1	1	263.0	47.7	0.0	0.0	0.0	62.5
			263.0	47.7	0.0	0.0	0.0	-122.3
		2	-27.4	-63.3	0.0	0.0	0.0	-130.2
			-27.4	-63.3	0.0	0.0	0.0	115.1
		3	394.5	71.5	0.0	0.0	0.0	93.7
			394.5	71.5	0.0	0.0	0.0	-183.4
		4	288.2	-6.1	0.0	0.0	0.0	-55.3
			288.2	-6.1	0.0	0.0	0.0	-31.7
		5	343.0	120.5	0.0	0.0	0.0	205.2
			343.0	120.5	0.0	0.0	0.0	-261.9
B - 3	1	1	686.6	-14.8	0.0	0.0	0.0	-19.4
			686.6	-14.8	0.0	0.0	0.0	37.9
		2	13.9	-71.6	0.0	0.0	0.0	-141.2
			13.9	-71.6	0.0	0.0	0.0	136.4
		3	1030.0	-22.2	0.0	0.0	0.0	-29.1
			1030.0	-22.2	0.0	0.0	0.0	56.9
		4	837.9	-89.4	0.0	0.0	0.0	-164.5
			837.9	-89.4	0.0	0.0	0.0	182.0
		5	810.1	53.9	0.0	0.0	0.0	117.9
			810.1	53.9	0.0	0.0	0.0	-90.9
B - 2	1	1	686.6	14.8	0.0	0.0	0.0	19.4
			686.6	14.8	0.0	0.0	0.0	-37.9
		2	-13.9	-71.6	0.0	0.0	0.0	-141.2
			-13.9	-71.6	0.0	0.0	0.0	136.4
		3	1030.0	22.2	0.0	0.0	0.0	29.1

			1030.0	22.2	0.0	0.0	0.0	-56.9
		4	810.1	-53.9	0.0	0.0	0.0	-117.9
			810.1	-53.9	0.0	0.0	0.0	90.9
		5	837.8	89.4	0.0	0.0	0.0	164.5
			837.8	89.4	0.0	0.0	0.0	-182.2
B - 1	1	1	263.0	-47.7	0.0	0.0	0.0	-62.5
			263.0	-47.7	0.0	0.0	0.0	122.1
		2	27.4	-63.3	0.0	0.0	0.0	-130.2
			27.4	-63.3	0.0	0.0	0.0	115.1
		3	394.5	-71.5	0.0	0.0	0.0	-93.7
			394.5	-71.5	0.0	0.0	0.0	183.4
		4	343.0	-120.5	0.0	0.0	0.0	-205.2
			343.0	-120.5	0.0	0.0	0.0	261.9
		5	288.2	6.1	0.0	0.0	0.0	55.1
			288.2	6.1	0.0	0.0	0.0	31.7

þ Linear Analysis - Beam End Forces

Units: KN, KN-m

END I X/L = 0.0 M2(+)max
END J X/L = 1.0

Beam	Floor	Load	Axl	Shr2	Shr3	Torque	M2	M3	M2	X/L
			Axl	Shr2	Shr3	Torque	M2	M3		
B(1-1D)	2	1	47.7	0.0	-246.9	0.0	-77.2	0.0	71.0	1.0
			47.7	0.0	-192.4	0.0	71.0	0.0		
		2	58.3	0.0	-27.4	0.0	-117.5	0.0	0.0	0.0
			58.3	0.0	-27.4	0.0	-99.0	0.0		
		3	71.5	0.0	-370.3	0.0	-115.9	0.0	106.5	1.0
			71.5	0.0	-288.7	0.0	106.5	0.0		
		4	115.5	0.0	-323.7	0.0	-210.2	0.0	0.0	0.0
			115.5	0.0	-258.3	0.0	-13.8	0.0		
		5	-1.1	0.0	-268.8	0.0	24.8	0.0	184.2	1.0
			-1.1	0.0	-203.5	0.0	184.2	0.0		
B(1D-2I)	2	1	47.7	0.0	-192.4	0.0	71.0	0.0	300.5	0.4
			47.7	0.0	299.5	0.0	-255.6	0.0		
		2	18.3	0.0	-27.4	0.0	-99.0	0.0	68.2	1.0
			18.3	0.0	-27.4	0.0	68.2	0.0		
		3	71.5	0.0	-288.6	0.0	106.5	0.0	450.7	0.4
			71.5	0.0	449.3	0.0	-383.4	0.0		
		4	75.5	0.0	-258.3	0.0	-13.8	0.0	330.7	0.45
			75.5	0.0	332.0	0.0	-238.5	0.0		
		5	38.9	0.0	-203.5	0.0	184.2	0.0	398.1	0.35
			38.9	0.0	386.8	0.0	-374.9	0.0		

B(2I-2)	2	1	47.7	0.0	299.5	0.0	-255.6	0.0	0.0	0.0
			47.7	0.0	354.0	0.0	-476.2	0.0		
		2	-21.6	0.0	-27.4	0.0	68.2	0.0	86.7	1.0
			-21.6	0.0	-27.4	0.0	86.7	0.0		
		3	71.5	0.0	449.3	0.0	-383.4	0.0	0.0	0.0
			71.5	0.0	531.0	0.0	-714.3	0.0		
		4	35.6	0.0	332.0	0.0	-238.5	0.0	0.0	0.0
			35.6	0.0	397.4	0.0	-484.7	0.0		
		5	78.9	0.0	386.8	0.0	-374.9	0.0	0.0	0.0
			78.9	0.0	452.2	0.0	-658.1	0.0		
B(2-2D)	2	1	32.9	0.0	-300.4	0.0	-447.1	0.0	0.0	0.0
			32.9	0.0	-246.0	0.0	-262.7	0.0		
		2	40.0	0.0	-13.6	0.0	-50.5	0.0	0.0	0.0
			40.0	0.0	-13.6	0.0	-41.3	0.0		
		3	49.3	0.0	-450.6	0.0	-670.7	0.0	0.0	0.0
			49.3	0.0	-369.0	0.0	-394.1	0.0		
		4	79.4	0.0	-374.1	0.0	-587.0	0.0	0.0	0.0
			79.4	0.0	-308.8	0.0	-356.5	0.0		
		5	-0.5	0.0	-347.0	0.0	-486.0	0.0	0.0	0.0
			-0.5	0.0	-281.6	0.0	-273.9	0.0		
B(2D-3I)	2	1	32.9	0.0	-246.0	0.0	-262.7	0.0	112.5	0.5
			32.9	0.0	246.0	0.0	-262.7	0.0		
		2	0.0	0.0	-13.6	0.0	-41.3	0.0	41.3	1.0
			0.0	0.0	-13.6	0.0	41.3	0.0		
		3	49.3	0.0	-369.0	0.0	-394.0	0.0	168.7	0.5
			49.3	0.0	369.0	0.0	-394.0	0.0		
		4	39.4	0.0	-308.7	0.0	-356.5	0.0	134.9	0.5
			39.4	0.0	281.6	0.0	-273.9	0.0		
		5	39.4	0.0	-281.6	0.0	-273.9	0.0	134.9	0.5
			39.4	0.0	308.7	0.0	-356.5	0.0		
B(3I-3)	2	1	32.9	0.0	246.0	0.0	-262.7	0.0	0.0	0.0
			32.9	0.0	300.4	0.0	-447.1	0.0		
		2	-40.0	0.0	-13.6	0.0	41.3	0.0	50.5	1.0
			-40.0	0.0	-13.6	0.0	50.5	0.0		
		3	49.3	0.0	369.0	0.0	-394.0	0.0	0.0	0.0
			49.3	0.0	450.6	0.0	-670.6	0.0		
		4	-0.5	0.0	281.6	0.0	-273.9	0.0	0.0	0.0
			-0.5	0.0	347.0	0.0	-486.0	0.0		
		5	79.4	0.0	308.7	0.0	-356.5	0.0	0.0	0.0
			79.4	0.0	374.1	0.0	-587.0	0.0		
B(3-3D)	2	1	47.7	0.0	-354.0	0.0	-476.2	0.0	0.0	0.0
			47.7	0.0	-299.5	0.0	-255.6	0.0		
		2	21.6	0.0	-27.4	0.0	-86.7	0.0	0.0	0.0
			21.6	0.0	-27.4	0.0	-68.2	0.0		
		3	71.5	0.0	-531.0	0.0	-714.3	0.0	0.0	0.0
			71.5	0.0	-449.3	0.0	-383.4	0.0		

		4	78.9	0.0	-452.2	0.0	-658.1	0.0	0.0	0.0
			78.9	0.0	-386.8	0.0	-374.9	0.0		
		5	35.6	0.0	-397.4	0.0	-484.7	0.0	0.0	0.0
			35.6	0.0	-332.0	0.0	-238.5	0.0		
B(3D-4I)	2	1	47.7	0.0	-299.5	0.0	-255.6	0.0	300.5	0.6
			47.7	0.0	192.4	0.0	71.0	0.0		
		2	-18.3	0.0	-27.4	0.0	-68.2	0.0	99.0	1.0
			-18.3	0.0	-27.4	0.0	99.0	0.0		
		3	71.5	0.0	-449.3	0.0	-383.4	0.0	450.7	0.6
			71.5	0.0	288.6	0.0	106.5	0.0		
		4	38.9	0.0	-386.8	0.0	-374.9	0.0	398.1	0.65
			38.9	0.0	203.5	0.0	184.2	0.0		
		5	75.5	0.0	-332.0	0.0	-238.5	0.0	330.7	0.55
			75.5	0.0	258.3	0.0	-13.8	0.0		
B(4I-4)	2	1	47.7	0.0	192.4	0.0	71.0	0.0	71.0	1.0
			47.7	0.0	246.9	0.0	-77.2	0.0		
		2	-58.3	0.0	-27.4	0.0	99.0	0.0	117.5	1.0
			-58.3	0.0	-27.4	0.0	117.5	0.0		
		3	71.5	0.0	288.6	0.0	106.5	0.0	106.5	1.0
			71.5	0.0	370.3	0.0	-115.9	0.0		
		4	-1.1	0.0	203.5	0.0	184.2	0.0	184.2	1.0
			-1.1	0.0	268.8	0.0	24.8	0.0		
		5	115.5	0.0	258.3	0.0	-13.8	0.0	0.0	0.0
			115.5	0.0	323.7	0.0	-210.2	0.0		

þ Linear Analysis - Support Reactions

Support		Load	Force (KN)			Moment (KN-m)	
Axis	Stry	LdComb	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	Ground	1	47.67	0.00	263.01	0.00	62.47	0.00
		2	63.31	0.00	27.41	0.00	130.25	0.00
		3	71.51	0.00	394.52	0.00	93.71	0.00
		4	120.52	0.00	343.02	0.00	205.21	0.00
		5	-6.10	0.00	288.19	0.00	-55.29	0.00
2	Ground	1	-14.80	0.00	686.65	0.00	-19.43	0.00
		2	71.65	0.00	-13.86	0.00	141.20	0.00
		3	-22.21	0.00	1029.97	0.00	-29.14	0.00
		4	55.88	0.00	810.12	0.00	117.89	0.00
		5	-89.41	0.00	837.84	0.00	-164.52	0.00
3	Ground	1	14.80	0.00	686.65	0.00	19.43	0.00
		2	71.65	0.00	13.86	0.00	141.20	0.00
		3	22.21	0.00	1029.978	0.00	29.14	0.00

	4	89.41	0.00	837.84	0.00	164.52	0.00
	5	-53.89	0.00	810.12	0.00	-117.88	0.00
4 Ground	1	-47.67	0.00	263.01	0.00	-62.47	0.00
	2	63.31	0.00	-27.41	0.00	130.25	0.00
	3	-71.51	0.00	394.52	0.00	-93.71	0.00
	4	-6.10	0.00	288.19	0.00	55.29	0.00
	5	-120.50	0.00	343.02	0.00	-205.21	0.00

3) Diseño Estructural:

a. Sentido B-C (Pórtico equivalente ejes 2-3):

	Ⓑ			Ⓒ	
M_v =	-530.0	-491.5	135.2	-491.5	-530.0
M_s =	86.3	-52.3		52.3	-86.3
$M_{uv} = 1.5M_v$	-795.0	-737.3		-737.3	-795.0
$1.2M_v+M_s$ =	-549.7	-642.1		-537.5	-722.3
$1.2M_v-M_s$ =	-722.3	-537.5		-642.1	-549.7
Se adopta ϕM_n =	795.0			795.0	
M_v en sección de diseño =	419.3		135.2	419.3	
ϕM_n =	629.0		202.8	629.0	
V_v =	352.5	-302.0		302.0	-352.5
V_s =	-24.3	-12.6		-12.6	-24.3
$V_{uv} = 1.5V_v$ =	528.8	-453.0		453.0	-528.8
$0.75x1.5V_v+2V_s$ =	348.0	-365.0		314.6	-445.2

	Ⓑ		Ⓒ	
$0.75x1.5V_v - 2V_s$ =	445.2	-314.6	365.0	-348.0
Se adopta V_u =	453.0		453.0	
V_v en sección de diseño =	272.2		272.2	
V_u =	408.3		408.3	

Franja de columnas
b = 3.925; d = 0.21; ϕM_n (máx) = 748.6 kN·m

	Ⓑ		Ⓒ
ϕM_n (kN·m) =	0.75*629.0 = 471.8	0.60*202.8 = 121.7	471.8
ρ =	0.007954	0.00190	0.007954
A_s (m^2) =	0.006556	~~0.001566~~	0.006553
	A_s mín = 0.0018*3.925*0.25 = 0.001766		
ϕ Superior:	33 ϕ 5/8" c/0.12	18 ϕ 3/8" c/0.24	33 ϕ 5/8" c/0.12
ϕ Inferior:	14 ϕ 1/2" c/0.30	14 ϕ 1/2" c/0.30	14 ϕ 1/2" c/0.30
V_u (kN) =	408.3		408.3

$$\phi V_c = \phi * 0.17\sqrt{f'_c} b\, d = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 3.925 * 0.21 * 1000 = 482.37 \text{ kN}$$

$\phi V_c > V_u$

Franja central
b = 3.925; d = 0.22; ϕM_n (máx) = 821.6 kN·m

	Ⓑ		Ⓒ
ϕM_n (kN·m) =	0.25*629.0 = 157.3	0.40*202.8 = 81.1	157.3
ρ =	0.002252	0.001146	0.002252
A_s (m^2) =	0.001944	~~0.001209~~	0.001944
	As mín = 0.0018*3.925*0.25 = 0.001766		
ϕ Superior:	28 ϕ 3/8" c/0.135		28 ϕ 3/8" c/0.135
ϕ Inferior:	25 ϕ 3/8" c/0.15	25 ϕ 3/8" c/0.15	25 ϕ 3/8" c/0.15

Revisión de la fuerza cortante a "d/2" del borde del capitel como losa en dos direcciones.

Aunque esta verificación ya se había efectuado al predimensionar en el problema 7.5, ahora se hace como una rutina del diseño utilizando el mismo capitel de 1.75 x 1.60 metros.

$$V = 9.27 * 8.70 * 7.85 - 9.27 * 1.96 * 1.81 = 600.20 \text{ kN}$$

$$V_u = 1.5 * 600.20 = 900.30 \text{ kN}$$

ϕV_c debe ser el menor de:

$$\text{(a) } \phi V_c = \phi * 0.17 * \left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\sqrt{f'_c} b_o d$$

donde β= es la relación del lado largo al lado corto de la columna, la carga concentrada o el área de reacción y b_o es el perímetro de la sección critica para cortante:

$$\phi V_c = 0.75 * 0.17 * \left(1 + \frac{2}{1.96 \div 1.81}\right)\sqrt{21.1} * 7.54 * 0.21 * 1000$$

$$\phi V_c = 2640.9 \text{ kN}$$

(b) $\phi V_c = \phi * 0.083 * \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2\right)\sqrt{f'_c} b_o d$

donde α_s es 40 para columnas interiores, 30 para columnas de borde y 20 para columnas esquineras:

$$\phi V_c = 0.75 * 0.083 * \left(\frac{40 * 0.21}{7.54} + 2\right)\sqrt{21.1} * 7.54 * 0.21 * 1000$$

$\phi V_c = 1407.03$ kN

(c) $\phi V_c = \phi * 0.33 * \sqrt{f'_c} b_o d = 0.75 * 0.33 * \sqrt{21.1} * 7.54 * 0.21 * 1000$

$\phi V_c = 1798.78$ kN

Por lo tanto $\phi V_c > V_u$

b) Sentido 2-3 (Pórtico equivalente ejes B-C)

	②			③	
M_v =	-476.2	-447.0	112.5	-447.0	-476.2
M_s =	86.7	-50.5		50.5	-86.7
$M_{uv} = 1.5M_v$ =	-714.2	-670.6		-670.6	-714.2
$1.2M_v+M_s$ =	-484.7	-587.0		-486.0	-658.1
$1.2M_v-M_s$ =	-658.1	-486.0		-587.0	-484.7
Se adopta ϕM_n =	714.2			714.2	
M_v en sección de diseño =	365.2		112.5	365.2	
ϕM_n =	547.8		168.8	547.8	

	②		③	
V_v =	354.0	-300.4	300.4	-354.0
V_s =	-27.4	-13.6	-13.6	-27.4
$V_{uv} = 1.5V_v$ =	531.0	-450.6	450.6	-531.0
$0.75x1.5V_v + 2V_s$=	343.5	-365.2	310.8	-453.1
$0.75x1.5V_v - 2V_s$=	453.1	-310.8	365.2	-343.5
Se adopta V_u =		450.6	450.6	
V_v en sección de diseño =		267.3	267.3	
V_u =		401.0	401.0	

$\phi V_c = \phi * 0.17\sqrt{f'_c} b\, d = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 4.35 * 0.21 * 1000$

$\phi V_c = 534.60$ kN

$\phi V_c > V_u$

Franjas de columnas

b = 4.35; d = 0.21; ϕM_n (máx) = 829.7 N·m

	②		③
ϕM_n (kN·m) =	0.75*547.8 = 410.9	0.60*168.8 = 101.3	410.9
ρ =	0.006105	0.001424	0.006105

	②		③
A_s (m^2) =	0.005577	0.001301	0.005577

As mín = 0.0018*4.35*0.25 = 0.001958

ϕ Superior:	28 ϕ 5/8" c/0.16	14 ϕ 3/8" c/0.32	28 ϕ 5/8" c/0.16
ϕ Inferior:	16 ϕ 1/2" c/0.29	16 ϕ 1/2" c/0.29	16 ϕ 1/2" c/0.29
V_u (kN) =	401.0		401.0

$\phi V_c > V_u$

Franja central

b = 4.35; d = 0.22; ϕM_n (máx) = 910.6 kN·m

	②		③
ϕM_n (kN·m) =	0.25*547.8 = 137.0	0.40*168.8 = 67.5	137.0
ρ =	0.001760	0.000855	0.001760
A_s (m^2) =	0.001684	0.000818	0.001684

As mín = 0.0018*4.35*0.25 = 0.001958

ϕ Superior:	28 ϕ 3/8" c/0.15		28 ϕ 3/8" c/0.15
ϕ Inferior:	28 ϕ 3/8" c/0.15	28 ϕ 3/8" c/0.15	28 ϕ 3/8" c/0.15

A continuación el detalle del refuerzo:

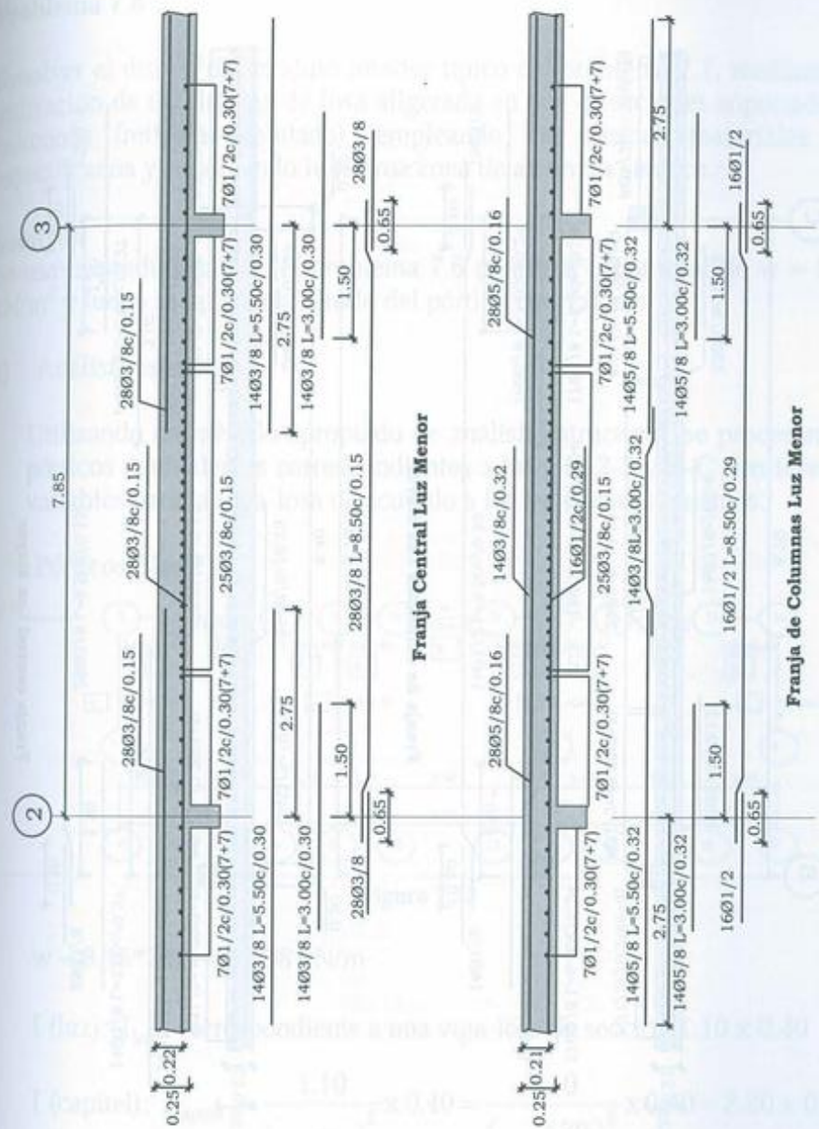


Figura 7.22a

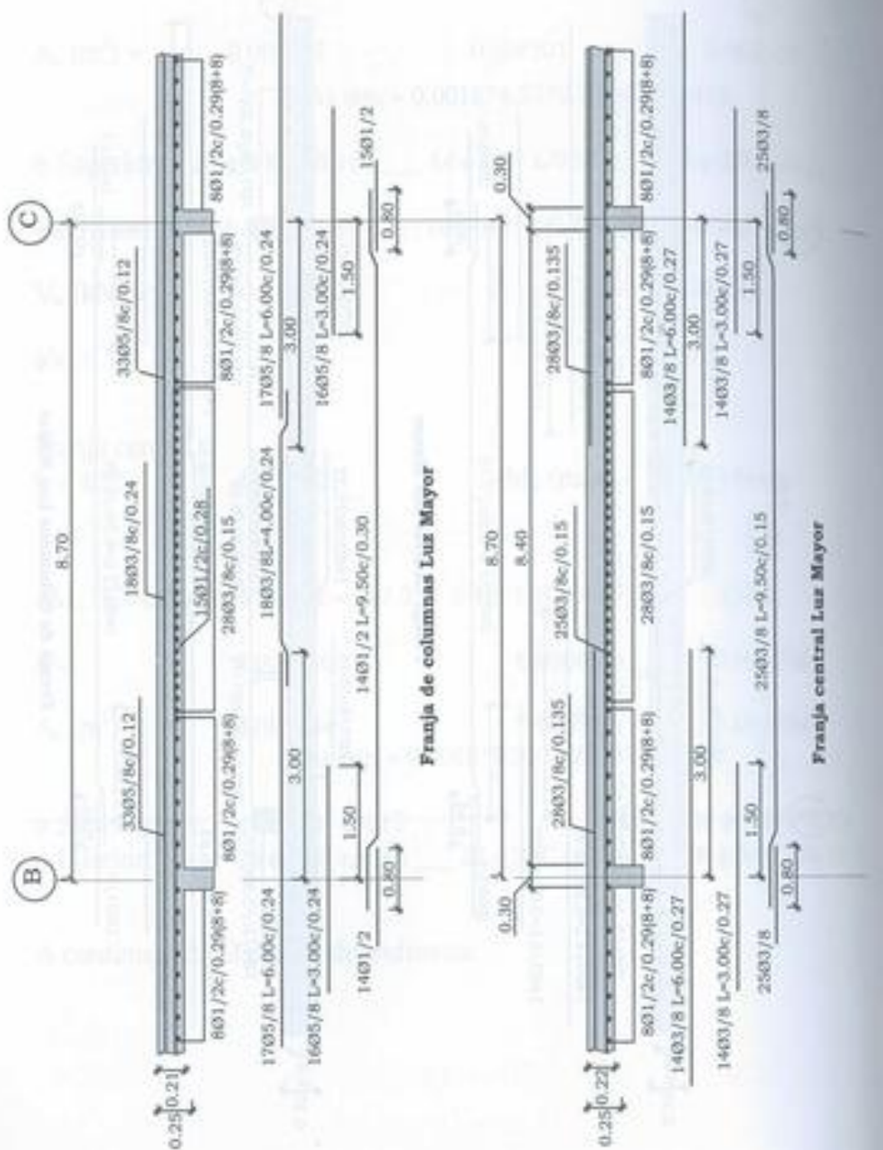


Figura 7.22b

Problema 7.8

Resolver el diseño del módulo interior típico del problema 7.7, mediante la utilización de un sistema de losa aligerada en dos direcciones soportada en columnas (reticular celulado), empleando los mismos materiales allí especificados y suponiendo la misma zona de amenaza sísmica.

Solución

Se usa la predimensión del problema 7.6 para una carga total de w = 8.15 kN/m^2 y luego se aplica el método del pórtico equivalente.

1) Análisis estructural

Utilizando un método apropiado de análisis estructural, se procesan los pórticos equivalentes correspondientes a los ejes 2-3 y B-C con inercias variables para la viga-losa de acuerdo a los esquemas siguientes:

Pórticos Ejes 2-3:

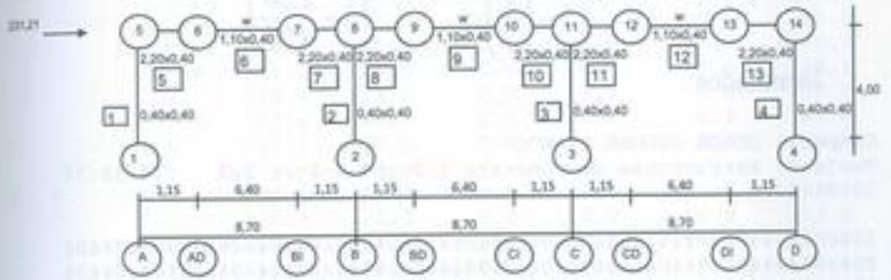


Figura 7.23

w = 8.15*7.85 = 63.98 kN/m

I (luz): I_{luz} : correspondiente a una viga-losa de sección 1.10 x 0.40

I (capitel): $I_{capitel} = \dfrac{1.10}{\left(1-\dfrac{c_2}{\ell_2}\right)^2} \times 0.40 = \dfrac{1.10}{\left(1-\dfrac{2.30}{7.85}\right)^2} \times 0.40 = 2.20 \times 0.40$

Pórticos Ejes B-C:

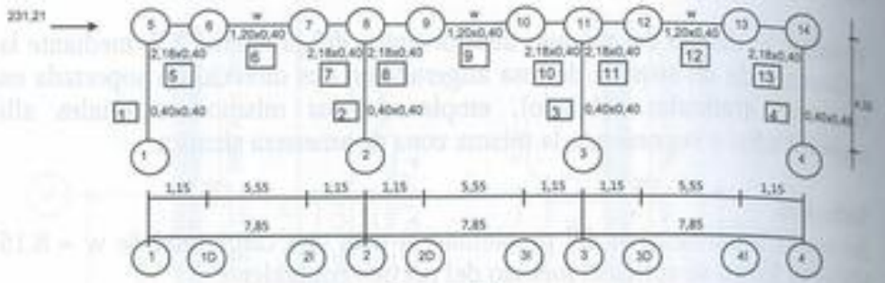


Figura 7.24

$w = 8.15 * 8.70 = 70.91$ kN/m

I (luz): I_{luz} : correspondiente a una viga-losa de sección 1.20 x 0.40

$$\text{I (capitel): } I_{capitel} = \frac{1.20}{\left(1-\frac{c_2}{\ell_2}\right)^2} x0.40 = \frac{1.20}{\left(1-\frac{2.30}{8.70}\right)^2} x0.40 = 2.18 \text{ x } 0.40$$

Resultados:

```
Company: JORGE SEGURA FRANCO
Project: Estructuras de Concreto I-Prob7.7-Port 2y3     10:38:38
22-01-2011

4044044044044044044044044044044044044044044044044044044044044044
4044044044044044044044044044044044044044044044044044044044044044
4044044044044044044044044044044044044044044044044044044044044044
4044044044044044044044044044044044044044044044044004004004004000

L O A D   C O M B I N A T I O N S

                No      Load combination
              ÄÄÄÄÄÄ    ÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄ

                 1        OT
                 2        EQ
                 3     1.5OT
                 4     1.2OT + EQ
                 5     1.2OT - EQ
```



```
                þ Linear Analysis - Column End Forces

Units:  KN, KN-m
                                BOTTOM
                                TOP
ÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄ
Column    Stry Load  Axial   Shear2  Shear3  Torque    Mom-2    Mom-3
                     Axial   Shear2  Shear3  Torque    Mom-2    Mom-3
ÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄÄ

2 - D     1    1   238.4    74.1     0.0     0.0      0.0     96.5
                   238.4    74.1     0.0     0.0      0.0   -185.1
               2   -20.3   -52.0     0.0     0.0      0.0   -110.1
                   -20.3   -52.0     0.0     0.0      0.0     87.5
               3   357.7   111.1     0.0     0.0      0.0    144.7
                   357.7   111.1     0.0     0.0      0.0   -277.6
               4   265.8    36.9     0.0     0.0      0.0      5.7
                   265.8    36.9     0.0     0.0      0.0   -134.6
               5   306.4   140.9     0.0     0.0      0.0    225.9
                   306.4   140.9     0.0     0.0      0.0   -309.6

2 - C     1    1   596.5   -21.3     0.0     0.0      0.0    -28.0
                   596.5   -21.3     0.0     0.0      0.0     52.9
               2     8.7   -63.6     0.0     0.0      0.0   -125.3
                     8.7   -63.6     0.0     0.0      0.0    116.4
               3   894.8   -31.9     0.0     0.0      0.0    -41.9
                   894.8   -31.9     0.0     0.0      0.0     79.4
               4   724.5   -89.1     0.0     0.0      0.0   -158.9
                   724.5   -89.1     0.0     0.0      0.0    179.9
               5   707.1    38.1     0.0     0.0      0.0     91.8
                   707.1    38.1     0.0     0.0      0.0    -52.9

2 - B     1    1   596.5    21.3     0.0     0.0      0.0     28.0
                   596.5    21.3     0.0     0.0      0.0    -52.9
               2    -8.7   -63.6     0.0     0.0      0.0   -125.3
                    -8.7   -63.6     0.0     0.0      0.0    116.4
               3   894.8    31.9     0.0     0.0      0.0     41.9
                   894.8    31.9     0.0     0.0      0.0    -79.4
               4   707.1   -38.1     0.0     0.0      0.0    -91.8
                   707.1   -38.1     0.0     0.0      0.0     52.9
               5   724.5    89.1     0.0     0.0      0.0    158.9
                   724.5    89.1     0.0     0.0      0.0   -179.9

2 - A     1    1   238.4   -74.1     0.0     0.0      0.0    -96.5
                   238.4   -74.1     0.0     0.0      0.0    185.1
               2    20.3   -52.0     0.0     0.0      0.0   -110.1
                    20.3   -52.0     0.0     0.0      0.0     87.5
               3   357.6  -111.1     0.0     0.0      0.0   -144.7
                   357.6  -111.1     0.0     0.0      0.0    277.6
```

	4	306.4	-140.9	0.0	0.0	0.0	-225.8	
		306.4	-140.9	0.0	0.0	0.0	309.6	
	5	265.8	-36.9	0.0	0.0	0.0	-5.7	
		265.8	-36.9	0.0	0.0	0.0	134.6	

þ Linear Analysis - Beam End Forces

Units: KN, KN-m

END I X/L = 0.0 M2(+)max
END J X/L = 1.0

Beam	Floor	Load	Axl	Shr2	Shr3	Torque	M2	M3	M2	X/L
			Axl	Shr2	Shr3	Torque	M2	M3		
2(A-AD)	2	1	74.1	0.0	-225.6	0.0	-153.5	0.0	32.0	1.0
			74.1	0.0	-164.9	0.0	32.0	0.0		
		2	46.9	0.0	-20.3	0.0	-93.9	0.0	0.0	0.0
			46.9	0.0	-20.3	0.0	-74.6	0.0		
		3	111.1	0.0	-338.5	0.0	-230.3	0.0	48.0	1.0
			111.1	0.0	-247.3	0.0	48.0	0.0		
		4	135.8	0.0	-291.1	0.0	-278.1	0.0	0.0	0.0
			135.8	0.0	-218.2	0.0	-36.2	0.0		
		5	42.0	0.0	-250.5	0.0	-90.3	0.0	113.0	1.0
			42.0	0.0	-177.6	0.0	113.0	0.0		
2(AD-BI)	2	1	74.1	0.0	-164.9	0.0	32.0	0.0	244.4	0.4
			74.1	0.0	244.6	0.0	-223.2	0.0		
		2	13.5	0.0	-20.3	0.0	-74.6	0.0	55.2	1.0
			13.5	0.0	-20.3	0.0	55.2	0.0		
		3	111.1	0.0	-247.3	0.0	48.0	0.0	366.6	0.4
			111.1	0.0	366.9	0.0	-334.8	0.0		
		4	102.4	0.0	-218.2	0.0	-36.2	0.0	273.6	0.45
			102.4	0.0	273.2	0.0	-212.6	0.0		
		5	75.4	0.0	-177.6	0.0	113.0	0.0	318.1	0.35
			75.4	0.0	313.8	0.0	-323.0	0.0		
2(BI-B)	2	1	74.1	0.0	244.6	0.0	-223.2	0.0	0.0	0.0
			74.1	0.0	305.4	0.0	-484.4	0.0		
		2	-20.0	0.0	-20.3	0.0	55.2	0.0	74.5	1.0
			-20.0	0.0	-20.3	0.0	74.5	0.0		
		3	111.1	0.0	366.9	0.0	-334.8	0.0	0.0	0.0
			111.1	0.0	458.1	0.0	-726.6	0.0		
		4	68.9	0.0	273.2	0.0	-212.6	0.0	0.0	0.0
			68.9	0.0	346.2	0.0	-506.8	0.0		
		5	108.9	0.0	313.8	0.0	-323.0	0.0	0.0	0.0
			108.9	0.0	386.8	0.0	-655.8	0.0		

2(B-BD)	2	1	52.8	0.0	-265.5	0.0	-435.2	0.0	0.0	0.0
			52.8	0.0	-204.7	0.0	-211.8	0.0		
		2	33.4	0.0	-11.6	0.0	-48.3	0.0	0.0	0.0
			33.4	0.0	-11.6	0.0	-37.2	0.0		
		3	79.2	0.0	-398.3	0.0	-652.8	0.0	0.0	0.0
			79.2	0.0	-307.1	0.0	-317.7	0.0		
		4	96.8	0.0	-330.2	0.0	-570.5	0.0	0.0	0.0
			96.8	0.0	-257.2	0.0	-291.4	0.0		
		5	29.9	0.0	-307.0	0.0	-474.0	0.0	0.0	0.0
			29.9	0.0	-234.0	0.0	-217.0	0.0		
A(BD-CI)	2	1	52.8	0.0	-204.7	0.0	-211.8	0.0	115.7	0.5
			52.8	0.0	204.7	0.0	-211.8	0.0		
		2	0.0	0.0	-11.6	0.0	-37.2	0.0	37.2	1.0
			0.0	0.0	-11.6	0.0	37.2	0.0		
		3	79.2	0.0	-307.1	0.0	-317.8	0.0	173.6	0.5
			79.2	0.0	307.1	0.0	-317.8	0.0		
		4	63.4	0.0	-257.2	0.0	-291.4	0.0	138.9	0.5
			63.4	0.0	234.0	0.0	-217.0	0.0		
		5	63.4	0.0	-234.0	0.0	-217.0	0.0	138.9	0.5
			63.4	0.0	257.2	0.0	-291.4	0.0		
A(CI-C)	2	1	52.8	0.0	204.7	0.0	-211.8	0.0	0.0	0.0
			52.8	0.0	265.5	0.0	-435.2	0.0		
		2	-33.4	0.0	-11.6	0.0	37.2	0.0	48.3	1.0
			-33.4	0.0	-11.6	0.0	48.3	0.0		
		3	79.2	0.0	307.1	0.0	-317.7	0.0	0.0	0.0
			79.2	0.0	398.3	0.0	-652.8	0.0		
		4	29.9	0.0	234.1	0.0	-217.0	0.0	0.0	0.0
			29.9	0.0	307.0	0.0	-474.0	0.0		
		5	96.8	0.0	257.3	0.0	-291.4	0.0	0.0	0.0
			96.8	0.0	330.2	0.0	-570.5	0.0		
A(C-CD)	2	1	74.1	0.0	-305.4	0.0	-484.4	0.0	0.0	0.0
			74.1	0.0	-244.6	0.0	-223.2	0.0		
		2	20.0	0.0	-20.3	0.0	-74.5	0.0	0.0	0.0
			20.0	0.0	-20.3	0.0	-55.2	0.0		
		3	111.1	0.0	-458.1	0.0	-726.6	0.0	0.0	0.0
			111.1	0.0	-366.9	0.0	-334.8	0.0		
		4	108.9	0.0	-386.8	0.0	-655.8	0.0	0.0	0.0
			108.9	0.0	-313.8	0.0	-323.0	0.0		
		5	68.9	0.0	-346.2	0.0	-506.8	0.0	0.0	0.0
			68.9	0.0	-273.2	0.0	-212.6	0.0		
A(CD-DI)	2	1	74.1	0.0	-244.6	0.0	-223.2	0.0	244.4	0.6
			74.1	0.0	164.9	0.0	32.0	0.0		
		2	-13.5	0.0	-20.3	0.0	-55.2	0.0	74.6	1.0
			-13.5	0.0	-20.3	0.0	74.6	0.0		
		3	111.1	0.0	-366.9	0.0	-334.8	0.0	366.6	0.4
			111.1	0.0	247.4	0.0	48.0	0.0		

		4	75.4	0.0	-313.8	0.0	-323.0	0.0	318.1	0.65
			75.4	0.0	177.6	0.0	113.0	0.0		
		5	102.4	0.0	-273.2	0.0	-212.6	0.0	273.6	0.55
			102.4	0.0	218.1	0.0	-36.2	0.0		
A(DI-D)	2	1	74.1	0.0	164.9	0.0	32.0	0.0	32.0	0.0
			74.1	0.0	225.6	0.0	-153.5	0.0		
		2	-46.9	0.0	-20.3	0.0	74.6	0.0	93.9	1.0
			-46.9	0.0	-20.3	0.0	93.9	0.0		
		3	111.1	0.0	247.4	0.0	48.0	0.0	48.0	0.0
			111.1	0.0	338.5	0.0	-230.2	0.0		
		4	42.0	0.0	177.6	0.0	113.0	0.0	113.0	0.0
			42.0	0.0	250.4	0.0	-90.3	0.0		
		5	135.8	0.0	218.1	0.0	-36.2	0.0	0.0	0.0
			135.8	0.0	291.1	0.0	-278.1	0.0		

þ Linear Analysis - Support Reactions

Support		Load	Force (KN)			Moment (KN-m)		
Axis	Stry	LdComb	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
A	Ground	1	74.09	0.00	238.44	0.00	96.46	0.00
		2	52.00	0.00	20.28	0.00	110.06	0.00
		3	111.14	0.00	357.66	0.00	144.69	0.00
		4	140.91	0.00	306.41	0.00	225.81	0.00
		5	36.91	0.00	265.85	0.00	5.69	0.00
B	Ground	1	-21.28	0.00	596.50	0.00	-27.96	0.00
		2	63.61	0.00	-8.66	0.00	125.31	0.00
		3	-31.92	0.00	894.74	0.00	-41.94	0.00
		4	38.07	0.00	707.14	0.00	91.76	0.00
		5	-89.15	0.00	724.45	0.00	-158.86	0.00
C	Ground	1	21.28	0.00	596.50	0.00	27.96	0.00
		2	63.61	0.00	8.66	0.00	125.31	0.00
		3	31.93	0.00	894.75	0.00	41.94	0.00
		4	89.15	0.00	724.45	0.00	158.86	0.00
		5	-38.07	0.00	707.14	0.00	-91.76	0.00
D	Ground	1	-74.09	0.00	238.44	0.00	-96.46	0.00
		2	52.00	0.00	-20.28	0.00	110.06	0.00
		3	-111.14	0.00	357.66	0.00	-144.69	0.00
		4	-36.91	0.00	265.85	0.00	-5.69	0.00
		5	-140.91	0.00	306.41	0.00	-225.81	0.00

Company: JORGE SEGURA FRANCO
Project: Estructuras de Concreto I-Prob7.7-Port ByC 12:51:29
05-08-1999

409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409
409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409
409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409
409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409409

LOAD COMBINATIONS

No	Load combination
1	OT
2	EQ
3	1.5OT
4	1.2OT + EQ
5	1.2OT - EQ

þ Linear Analysis - Column End Forces

Units: KN, KN-m

Column	Stry	Load	BOTTOM Axial / TOP Axial	Shear2	Shear3	Torque	Mom-2	Mom-3
B - 4	1	1	236.0	60.5	0.0	0.0	0.0	78.8
			236.0	60.5	0.0	0.0	0.0	-151.0
		2	-23.0	-52.6	0.0	0.0	0.0	-109.6
			-23.0	-52.6	0.0	0.0	0.0	90.2
		3	354.0	90.7	0.0	0.0	0.0	118.2
			354.0	90.7	0.0	0.0	0.0	-226.4
		4	260.3	20.0	0.0	0.0	0.0	-15.1
			260.3	20.0	0.0	0.0	0.0	-91.0
		5	306.2	125.1	0.0	0.0	0.0	204.1
			306.2	125.1	0.0	0.0	0.0	-271.3
B - 3	1	1	598.9	-18.1	0.0	0.0	0.0	-23.7
			598.9	-18.1	0.0	0.0	0.0	45.0
		2	10.4	-63.0	0.0	0.0	0.0	-123.3
			10.4	-63.0	0.0	0.0	0.0	116.2
		3	898.4	-27.2	0.0	0.0	0.0	-35.6
			898.4	-27.2	0.0	0.0	0.0	67.5

		4	729.1	-84.7	0.0	0.0	0.0	-151.8
			729.1	-84.7	0.0	0.0	0.0	170.1
		5	708.3	41.3	0.0	0.0	0.0	94.5
			708.3	41.3	0.0	0.0	0.0	-62.2
B - 2	1	1	598.9	18.1	0.0	0.0	0.0	21.7
			598.9	18.1	0.0	0.0	0.0	-45.0
		2	-10.4	-63.0	0.0	0.0	0.0	-123.3
			-10.4	-63.0	0.0	0.0	0.0	116.2
		3	898.4	27.1	0.0	0.0	0.0	35.4
			898.4	27.1	0.0	0.0	0.0	-67.5
		4	708.3	-41.3	0.0	0.0	0.0	-94.9
			708.3	-41.3	0.0	0.0	0.0	62.2
		5	729.1	84.7	0.0	0.0	0.0	151.8
			729.1	84.7	0.0	0.0	0.0	-170.1
B - 1	1	1	236.0	-60.5	0.0	0.0	0.0	-78.8
			236.0	-60.5	0.0	0.0	0.0	151.0
		2	23.0	-52.6	0.0	0.0	0.0	-109.6
			23.0	-52.6	0.0	0.0	0.0	90.2
		3	354.0	-90.7	0.0	0.0	0.0	-118.2
			354.0	-90.7	0.0	0.0	0.0	226.5
		4	306.2	-125.1	0.0	0.0	0.0	-204.2
			306.2	-125.1	0.0	0.0	0.0	271.3
		5	260.3	-20.0	0.0	0.0	0.0	15.1
			260.3	-20.0	0.0	0.0	0.0	91.0

þ Linear Analysis - Beam End Forces

Units: KN, KN-m

END I X/L = 0.0 M2(+)max
END J X/L = 1.0

Beam	Floor	Load	Axl	Shr2	Shr3	Torque	M2	M3	M2	X/L
			Axl	Shr2	Shr3	Torque	M2	M3		
B(1-1D)	2	1	60.5	0.0	-221.8	0.0	-117.3	0.0	61.5	1.0
			60.5	0.0	-154.5	0.0	61.5	0.0		
		2	46.9	0.0	-23.0	0.0	-96.1	0.0	0.0	0.0
			46.9	0.0	-23.0	0.0	-74.3	0.0		
		3	90.7	0.0	-332.8	0.0	-175.9	0.0	92.2	1.0
			90.7	0.0	-231.8	0.0	92.2	0.0		
		4	119.5	0.0	-289.2	0.0	-236.8	0.0	0.0	0.0
			119.5	0.0	-208.3	0.0	-0.5	0.0		
		5	25.6	0.0	-243.2	0.0	-44.6	0.0	148.1	1.0
			25.6	0.0	-162.4	0.0	148.1	0.0		

B(1D-2I)	2	1	60.5	0.0	-154.5	0.0	61.5	0.0	229.7	0.4
			60.5	0.0	239.1	0.0	-173.3	0.0		
		2	14.0	0.0	-23.0	0.0	-74.3	0.0	53.1	1.0
			14.0	0.0	-23.0	0.0	53.1	0.0		
		3	90.7	0.0	-231.7	0.0	92.2	0.0	344.5	0.4
			90.7	0.0	358.7	0.0	-259.9	0.0		
		4	86.6	0.0	-208.3	0.0	-0.5	0.0	254.4	0.45
			86.6	0.0	263.9	0.0	-154.9	0.0		
		5	58.5	0.0	-162.4	0.0	148.1	0.0	303.0	0.35
			58.5	0.0	309.8	0.0	-261.1	0.0		
B(2I-2)	2	1	60.5	0.0	239.1	0.0	-173.3	0.0	0.0	0.0
			60.5	0.0	306.4	0.0	-432.4	0.0		
		2	-18.8	0.0	-23.0	0.0	53.1	0.0	74.9	1.0
			-18.8	0.0	-23.0	0.0	74.9	0.0		
		3	90.7	0.0	358.7	0.0	-259.9	0.0	0.0	0.0
			90.7	0.0	459.7	0.0	-648.6	0.0		
		4	53.7	0.0	263.9	0.0	-154.9	0.0	0.0	0.0
			53.7	0.0	344.7	0.0	-444.0	0.0		
		5	91.4	0.0	309.9	0.0	-261.7	0.0	0.0	0.0
			91.4	0.0	390.7	0.0	-593.8	0.0		
B(2-2D)	2	1	42.4	0.0	-264.1	0.0	-392.3	0.0	0.0	0.0
			42.4	0.0	-196.8	0.0	-173.4	0.0		
		2	32.9	0.0	-12.6	0.0	-46.8	0.0	0.0	0.0
			32.9	0.0	-12.6	0.0	-34.9	0.0		
		3	63.6	0.0	-396.2	0.0	-588.5	0.0	0.0	0.0
			63.6	0.0	-295.2	0.0	-260.0	0.0		
		4	83.7	0.0	-329.5	0.0	-517.6	0.0	0.0	0.0
			83.7	0.0	-248.7	0.0	-242.9	0.0		
		5	18.0	0.0	-304.4	0.0	-424.0	0.0	0.0	0.0
			18.0	0.0	-223.6	0.0	-173.2	0.0		
B(2D-3I)	2	1	42.4	0.0	-196.8	0.0	-173.4	0.0	99.7	0.5
			42.4	0.0	196.8	0.0	-173.4	0.0		
		2	0.0	0.0	-12.6	0.0	-34.9	0.0	34.9	1.0
			0.0	0.0	-12.6	0.0	34.9	0.0		
		3	63.6	0.0	-295.2	0.0	-260.0	0.0	149.5	0.5
			63.6	0.0	295.2	0.0	-260.0	0.0		
		4	50.9	0.0	-248.7	0.0	-242.9	0.0	119.8	0.55
			50.9	0.0	223.6	0.0	-173.2	0.0		
		5	50.9	0.0	-223.6	0.0	-173.2	0.0	119.8	0.45
			50.9	0.0	248.7	0.0	-242.9	0.0		
B(3I-3)	2	1	42.4	0.0	196.8	0.0	-173.4	0.0	0.0	0.0
			42.4	0.0	264.1	0.0	-392.3	0.0		
		2	-32.9	0.0	-12.6	0.0	34.9	0.0	46.8	1.0
			-32.9	0.0	-12.6	0.0	46.8	0.0		
		3	63.6	0.0	295.2	0.0	-260.0	0.0	0.0	0.0
			63.6	0.0	396.2	0.0	-588.4	0.0		

		4	18.0	0.0	223.6	0.0	-173.2	0.0	0.0	0.0
			18.0	0.0	304.4	0.0	-424.0	0.0		
		5	83.7	0.0	248.7	0.0	-242.9	0.0	0.0	0.0
			83.7	0.0	329.5	0.0	-517.6	0.0		
B(3-3D)	2	1	60.5	0.0	-306.4	0.0	-432.4	0.0	0.0	0.0
			60.5	0.0	-239.1	0.0	-173.3	0.0		
		2	18.8	0.0	-23.0	0.0	-74.9	0.0	0.0	0.0
			18.8	0.0	-23.0	0.0	-53.1	0.0		
		3	90.7	0.0	-459.6	0.0	-648.6	0.0	0.0	0.0
			90.7	0.0	-358.7	0.0	-259.9	0.0		
		4	91.4	0.0	-390.7	0.0	-593.8	0.0	0.0	0.0
			91.4	0.0	-309.8	0.0	-261.0	0.0		
		5	53.7	0.0	-344.8	0.0	-444.0	0.0	0.0	0.0
			53.7	0.0	-263.9	0.0	-154.9	0.0		
B(3D-4I)	2	1	60.5	0.0	-239.1	0.0	-173.3	0.0	229.7	0.6
			60.5	0.0	154.5	0.0	61.5	0.0		
		2	-14.0	0.0	-23.0	0.0	-53.1	0.0	74.3	1.0
			-14.0	0.0	-23.0	0.0	74.3	0.0		
		3	90.7	0.0	-358.7	0.0	-259.9	0.0	344.5	0.6
			90.7	0.0	231.7	0.0	92.2	0.0		
		4	58.5	0.0	-309.8	0.0	-261.0	0.0	303.0	0.65
			58.5	0.0	162.4	0.0	148.1	0.0		
		5	86.6	0.0	-263.9	0.0	-154.9	0.0	254.4	0.55
			86.6	0.0	208.3	0.0	-0.5	0.0		
B(4I-4)	2	1	60.5	0.0	154.5	0.0	61.5	0.0	61.5	1.0
			60.5	0.0	221.8	0.0	-117.3	0.0		
		2	-46.9	0.0	-23.0	0.0	74.3	0.0	96.1	1.0
			-46.9	0.0	-23.0	0.0	96.1	0.0		
		3	90.7	0.0	231.7	0.0	92.2	0.0	92.2	1.0
			90.7	0.0	332.8	0.0	-175.9	0.0		
		4	25.6	0.0	162.4	0.0	148.1	0.0	148.1	0.0
			25.6	0.0	243.2	0.0	-44.6	0.0		
		5	119.5	0.0	208.3	0.0	-0.5	0.0	0.0	1.0
			119.5	0.0	289.2	0.0	-236.8	0.0		

þ Linear Analysis - Support Reactions

Support		Load	Force (KN)			Moment (KN-m)	
Axis	Stry	LdComb	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	Ground	1	60.45	0.00	236.02	0.00	78.77	0.00
		2	52.58	0.00	22.96	0.00	109.59	0.00
		3	90.68	0.00	354.03	0.00	118.15	0.00
		4	125.12	0.00	306.18	0.00	204.12	0.00
		5	19.97	0.00	260.27	0.00	-15.07	0.00

2	Ground	1	-18.07	0.00	598.95	0.00	-23.72	0.00
		2	63.03	0.00	-10.39	0.00	123.32	0.00
		3	-27.11	0.00	898.43	0.00	-35.58	0.00
		4	41.34	0.00	708.34	0.00	94.86	0.00
		5	-84.72	0.00	729.13	0.00	-151.78	0.00
3	Ground	1	18.07	0.00	598.95	0.00	23.72	0.00
		2	63.03	0.00	10.39	0.00	123.32	0.00
		3	27.11	0.00	898.42	0.00	35.58	0.00
		4	84.72	0.00	729.13	0.00	151.78	0.00
		5	-41.34	0.00	708.34	0.00	-94.86	0.00
4	Ground	1	-60.45	0.00	236.02	0.00	-78.77	0.00
		2	52.58	0.00	-22.96	0.00	109.59	0.00
		3	-90.68	0.00	354.03	0.00	-118.15	0.00
		4	-19.97	0.00	260.27	0.00	15.07	0.00
		5	-125.12	0.00	306.18	0.00	-204.12	0.00

2) Diseño Estructural

a. Sentido B-C (Pórtico equivalente ejes 2-3):

	Ⓑ			Ⓒ	
M_v =	-484.4	-435.2	115.7	-435.2	-484.4
M_s =	74.5	-48.3		48.3	-74.5
$M_{uv} = 1.5M_v$ =	-726.6	-652.8		-652.8	-726.6
$1.2M_v+M_s$ =	-506.8	-570.5		-474.0	-655.8
$1.2M_v-M_s$ =	655.8	-474.0		-570.5	-506.8
Se adopta ϕM_n =	726.6			726.6	
M_v en sección de diseño =	367.4		115.7	367.4	
ϕM_n =	551.1		173.6	551.1	
V_v =	305.4	-265.5		265.5	-305.4

	Ⓑ		Ⓒ	
V_s =	-20.3	-11.6	-11.6	-20.3
$V_{uv} = 1.5V_v$ =	458.1	-398.3	398.3	-458.1
$0.75x1.5V_v + 2V_s$ =	303.0	-321.9	275.5	-384.2
$0.75x1.5V_v - 2V_s$ =	384.2	-275.5	321.9	-303.0
Se adopta V_u =		398.3	398.3	
V_v en sección de diseño =		230.3	230.3	
V_u =		345.5	345.5	

Franja de columnas

Constituida por 3 vigas de capitel de b = 0.20, d = 0.33 y 0.35, d' = 0.05 y ϕM_n (máx) = 94.20 kN·m y 106.0 kN·m respectivamente

	Ⓑ		Ⓒ
ϕM_n (kN·m) =	1/3*0.75*551.1 = 137.8	1/3*0.60*173.6 = 34.7	137.8
ρ =		0.003929 (para d = 0.35)	
ΔM =	43.6 (para d = 0.33)		43.6
A_{s1} =	0.000899		0.000899
A_{s2} =	0.000412		0.000412
A_{st} =	0.001311	0.000275	0.001311
ϕ Superior:	1 ϕ 7/8" +2 ϕ 1"	2 ϕ 5/8"	1 ϕ 7/8" +2 ϕ 1"
ϕ Inferior:	1 ϕ 3/4"+1 ϕ 5/8"	1ϕ 3/4"+1ϕ 5/8"	1 ϕ 3/4"+1ϕ 5/8"
V_u (kN) =	345.5		345.5

V_u por viga: se distribuye la fuerza de corte proporcionalmente a las inercias de los elementos resistentes que son 3 vigas de capitel y 5 viguetas centrales y aceptando que las vigas de capitel pueden tomar un 33% más de carga que las viguetas centrales. Por lo tanto:

V_u/viga (kN) =	$\frac{4}{3} * 345.5 * \frac{20}{110} = 83.76$	83.76
$\phi V_c = \phi * 0.17\sqrt{f'_c}bd$	= 0.75 * 0.17 * $\sqrt{21.1}$ * 0.20 * 0.33 * 1000 = 38.62 kN	
$\phi V_s = V_u - V_c$ =	43.14	43.14
S total (m) =	0.33 + 2.19 + 0.81 = 3.33	3.33
Estribos:	10 ε ϕ 3/8" c/0.08	ídem
	+ ε ϕ 3/8" c/0.16 en el resto de la longitud del elemento	

Franja central

Constituida por 5 viguetas centrales de b = 0.10, d = 0.36 y ϕM_n (máx) = 56.1 kN·m

	Ⓑ		Ⓒ
ϕM_n (kN·m) =	1/5*0.25*551.1 =27.6	1/5*0.40*173.6 = 13.9	27.6
ρ =	0.006067	0.002940	0.006067
A_s (m^2) =	0.000218	0.000106	0.000218
A_s mín (m^2) =		0.0033*0.10*0.36 = 0.000119	
ϕ Superior:	2 ϕ 1/2"		2 ϕ 1/2"
ϕ Inferior:	1 ϕ 1/2"	1 ϕ 1/2"	1 ϕ 1/2"
V_u (kN) =	345.5		345.5

V_u por vigueta: de acuerdo a la distribución de la fuerza de corte que se presentó para las vigas de la franja de columnas o capitel, a las viguetas de la franja central les corresponde el complemento. Por tanto:

V_s/vigueta (kN) =	$\frac{1}{5} * \left(345.5 - \frac{4}{3} * 345.5 * \frac{60}{110}\right) = 18.9$	18.9
$\phi V_c = \phi * 0.17\sqrt{f'_c}bd =$	$0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 0.10 * 0.36 * 1000 = 21.1$ kN	
$\phi V_c > V_u$		
Estribos:	5 ε ϕ 1/4" c/0.18	ídem
	+ ε ϕ 1/4" c/0.35 hasta donde exista refuerzo superior	

A continuación, el refuerzo.

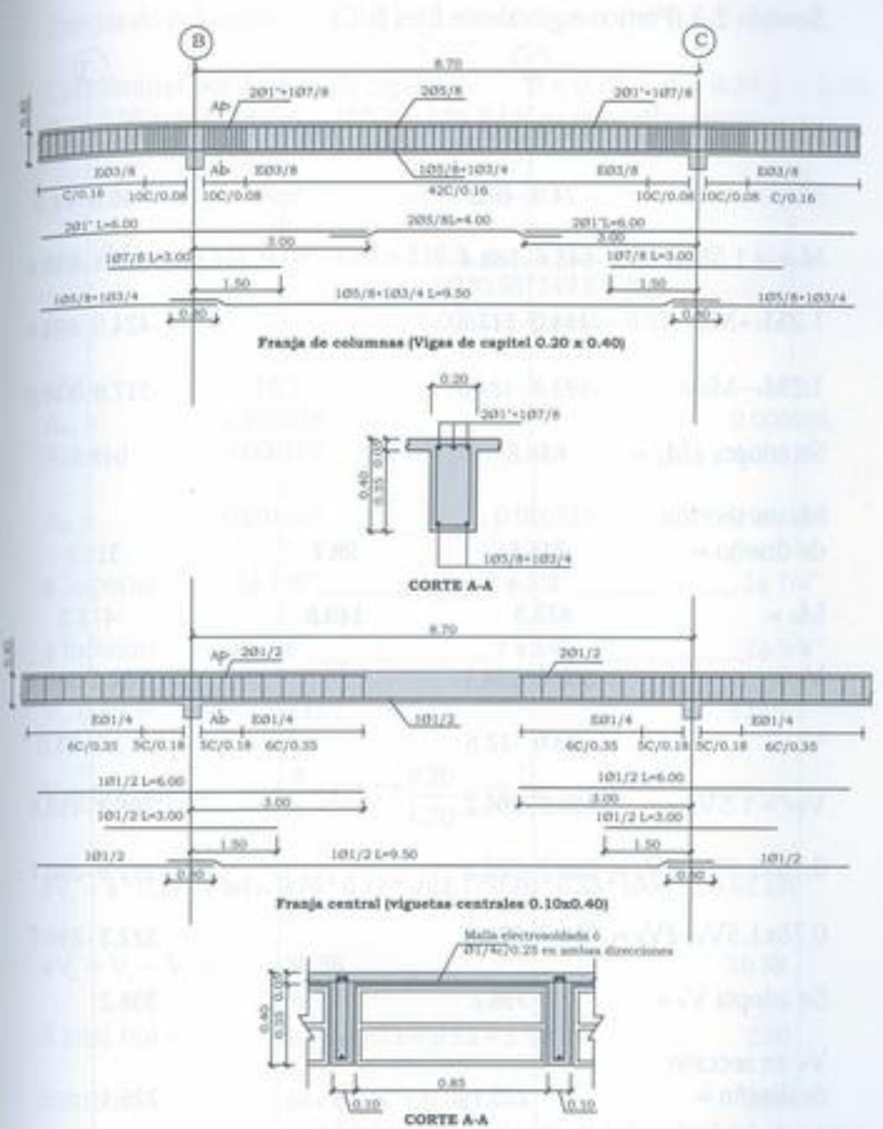


Figura 7.25

Sentido 2-3 (Pórtico equivalente Ejes B-C)

	②			③	
M_v =	-432.4	-392.3	99.7	-392.3	-432.4
M_s =	74.9	-46.8		46.8	-74.9
$M_{uv} = 1.5M_v$	-648.6	-588.4		-588.4	-648.6
$1.2M_v+M_s$=	-444.0	-517.6		-424.0	-593.8
$1.2M_v-M_s$ =	-593.8	-424.0		-517.6	-444.0
Se adopta ϕM_n =	648.6			648.6	
M_v en sección de diseño =	315.5		99.7	315.5	
M_u =	473.3		149.6	473.3	
V_v =	306.4	-264.1		264.1	-306.4
V_s =	-23.0	-12.6		-12.6	-23.0
$V_{uv} = 1.5V_v$ =	459.6	-396.2		396.2	-459.6
$0.75x1.5V_v+2V_s$ =	298.7	-322.3		271.9	-390.7
$0.75x1.5V_v-2V_s$ =	390.7	-271.9		322.3	-298.7
Se adopta V_u =	396.2			396.2	
V_v en sección de diseño =	225.1			225.1	
V_u =	337.7			337.7	

Franjas de columnas

Constituidas por 3 vigas de capitel de b = 0.20, d = 0.34 y 0.35, d' = 0.05 y ϕM_n (máx) = 100.0 y 106.0 kN·m respectivamente

	②		③
ϕM_n (kN·m) =	1/3*0.75*473.3 = 118.3	1/3*0.60*149.6 = 29.9	118.3
ρ =		0.003355 (para d = 0.35)	
ΔM =	18.3		18.3
A_{s1} =	0.000926		0.000926
A_{s2} =	0.000167		0.000167
A_{st} =	0.001093	0 000235	0.001093
ϕ Superior:	3ϕ 7/8"	2 ϕ 5/8"	3ϕ 7/8"
ϕ Inferior:	2ϕ 5/8"	2 ϕ 5/8"	2ϕ 5/8"
V_u (kN) =	337.7		337.7
V_u/viga (kN) =	$\frac{4}{3} * 337.7 * \frac{0.20}{1.20} = 75.04$		75.04
$\phi V_c = \phi * 0.17\sqrt{f'_c}bd$ =	0.75 * 0.17 * $\sqrt{21.1}$ * 0.20 * 0.33 * 1000 = 38.62 kN		
$\phi V_s = V_u - V_c$ =	36.38		36.38
S total (m) =	0.34 + 1.73 + 0.83 = 2.90		2.90
Estribos:	10 ε ϕ 3/8" c/0.08		ídem
	+ ε ϕ 3/8" c/0.17 en el resto de la longitud del elemento		

Franja central

Constituida por 6 viguetas centrales de b = 0.10, d = 0.36 y
ϕM_n (máx) = 56.1 kN·m

	②		③
ϕM_n (kN·m) =	1/6*0.25*473.3 = 19.7	1/6*0.40*149.6 = 10.0	19.7
ρ =	0.004229	0.002094	0.004229
A_s (m^2) =	0.000152	0.000073	0.000207
		0.0033*0.10*0.36 = 0.000119	
ϕ Superior:	1ϕ1/2" + 1ϕ3/8"		1ϕ1/2" + 1ϕ3/8"
ϕ Inferior:	1 ϕ 1/2"	1 ϕ 1/2"	1 ϕ 1/2"
V_u (kN) =	337.7		337.7
V_u/vigueta (kN) =	$\frac{1}{6}*\left(337.7-\frac{4}{3}*337.7*\frac{0.60}{1.20}\right)=18.76$		18.76

$\phi V_c = \phi * 0.17\sqrt{f'_c}bd = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*0.10*0.36*1000 = 21.1$ kN

$\phi V_c > V_u$

Estribos: 5 ε ϕ 1/4" c/0.18 ídem
+ ε ϕ 1/4" c/0.35 hasta donde exista refuerzo superior

Refuerzo loseta superior o de recubrimiento:
Utilizando refuerzo para f_y = 420 MPa, resulta:

$A_s = 0.0018*1.00*0.05 = 0.00009$ m^2/metro.

∴ Armadura: ϕ 1/4" c/0.25 en ambas direcciones.

Para este caso resultaría útil el empleo de una malla electrosoldada, que tuviera un área mínima de alambre por metro cuadrado de 90 mm^2/metro en ambas direcciones.

Nota:
Aunque no es aplicable al módulo interior típico de los problemas propuestos, cabe hacer notar al lector la necesidad de tener en cuenta el análisis y diseño de la torsión en aquellos elementos que por su localización sean susceptibles de resistir tales esfuerzos.

A continuación se presenta el detalle con el refuerzo obtenido.

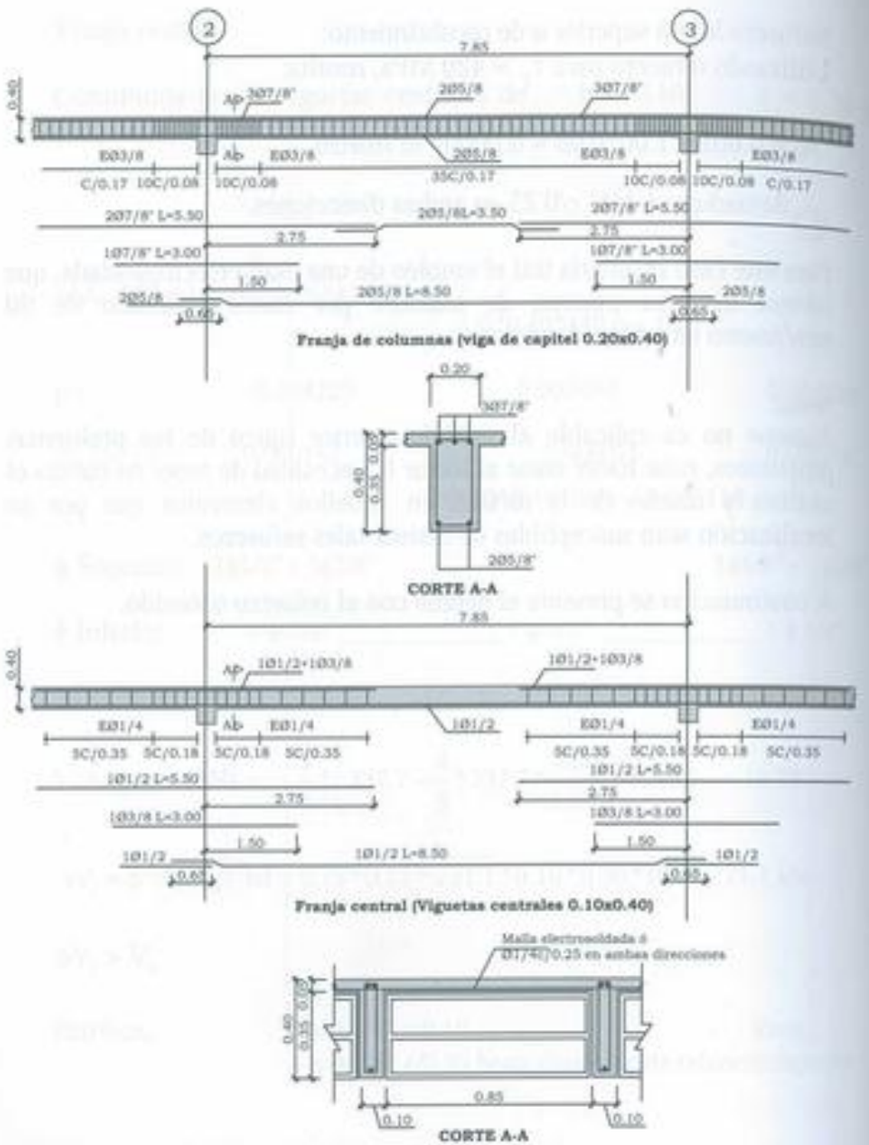


Figura 7.26

Capítulo 8

CIMENTACIONES

CIMENTACIONES

Se denomina cimentación al conjunto de elementos estructurales construidos en la base de una estructura con el objeto de transmitir las cargas de la misma al subsuelo de soporte.

Los dos objetivos fundamentales que se buscan en el diseño de una cimentación son la obtención de asentamientos limitados a cantidades admisibles y que los asentamientos diferenciales sean mínimos; esto se logra si se apoya la estructura en un estrato apropiado y si el tamaño de la fundación es suficiente, todo de acuerdo al estudio de suelos y recomendaciones de cimentación del especialista correspondiente.

Cuando el estrato de apoyo se localiza inmediatamente abajo de la estructura, se tendrá una cimentación superficial o directa basada en zapatas, vigas o losas de fundación; en otro caso se tendrá la denominada cimentación de profundidad constituida por pilotes o pilares que transmiten o disipan la carga en estratos profundos. En este capítulo se tratarán estos dos tipos de cimentaciones, en este orden y sólo desde el punto de vista del diseño estructural que tales elementos implican y con el alcance que corresponde a los propósitos del presente texto.

Cimentaciones superficiales o directas

En el primer tipo de cimentación, o sea, cimentaciones superficiales o directas, su diseño se hará a partir de la carga de la columna o muro, que si se considera simétricamente distribuida con respecto al cimiento, es decir, coincidentes el centro de gravedad de las cargas a cimentar con el centro de gravedad del cimiento el área de cimentación se puede obtener de la división de la carga total por la presión admisible adjudicada al terreno. Esta suposición de uniformidad en la reacción del suelo no es estrictamente exacta y variará en una u otra forma dependiendo en parte de las características del suelo e influyendo especialmente en la adopción y aproximaciones del diseño estructural.

Por otra parte, si el centro de cargas y el del cimiento no coinciden, la reacción del terreno ya no se puede asimilar a la uniforme, sino que variará según la excentricidad, de acuerdo con la figura 8.1.

En este caso se puede considerar que no solamente llega al cimiento una carga vertical P sino también un momento M = P·e. Las reacciones del terreno pueden evaluarse según la expresión:

$$\sigma_{min}^{max} = \frac{P}{A}\left(1 \pm \frac{6e}{L}\right)$$

en donde se denomina:

A = área de cimentación;

L = dimensión en el sentido de la excentricidad o flexión.

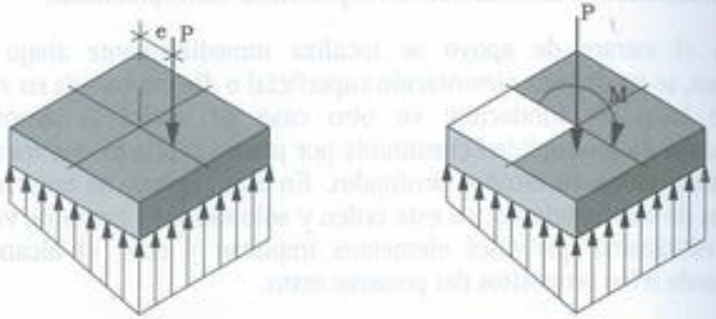


Figura 8.1

Las clases de cimentaciones superficiales o directas contempladas en el presente texto son:

a) Cimentaciones en concreto reforzado para muros:

Figura 8.2.a

b) Cimentación aislada para columnas (zapatas):

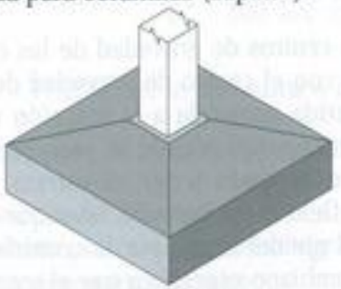


Figura 8.2.b

c) Cimentación combinada para dos columnas:

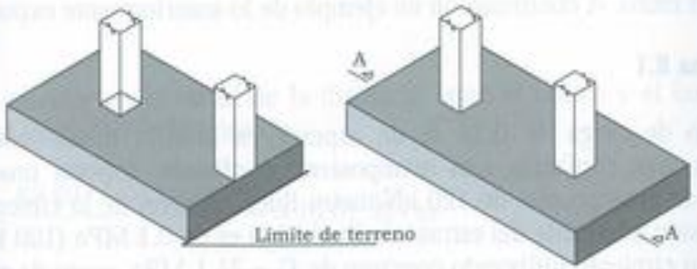


Figura 8.2.c

d) Cimentación con viga de contrapeso:

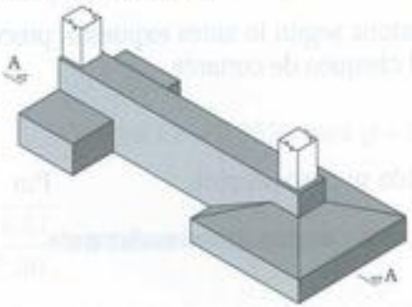


Figura 8.2.d

A continuación se hará referencia a cada una de estas cimentaciones.

Cimentación en concreto reforzado para muros

Una vez coincidentes los centros de gravedad de las cargas del muro y del peso propio del cimiento con el centro de gravedad del cimiento, se diseña éste como una viga invertida sometida a la reacción uniforme del terreno, descontándole la reacción correspondiente al peso propio del cimiento por considerarse íntegramente apoyado sobre el estrato de fundación y, por tanto, no productor de flexión y cortante. Aunque el momento flector máximo se presenta en el eje del muro, por la consideración de rigidez del muro, el Reglamento colombiano especifica que el momento de diseño debe calcularse en la cara del muro para muros de concreto y en la mitad de la distancia entre el centro y el borde del muro para muros de mampostería. Para determinar la fuerza de corte se debe calcular a una distancia "d" del borde del muro. A continuación un ejemplo de lo anteriormente expuesto:

Problema 8.1

Un muro de carga de 0.25 m de espesor en ladrillo tolete macizo de cerámica, que conforma una mampostería confinada, soporta una carga, incluido su peso propio, de 120 kN/metro lineal al nivel de la cimentación. Si la presión admisible del estrato de fundación es de 0.1 MPa (100 kN/m^2), diseñar su cimiento utilizando concreto de f'_c = 21.1 MPa, acero de refuerzo para f_s = 170 MPa en todos los diámetros y n = 9.3.

Solución

Inicialmente se dimensiona según lo antes expuesto, procediendo luego a su diseño por flexión y al chequeo de cortante.

Cargas:

Carga del muro (incluido su peso propio): Pm = 120.0 kN/m

Peso propio del cimiento (se asume aproximadamente como el 10% de Pm): = 12.0 kN/m

Total: P = 132.0 kN/m

Area necesaria de cimentación: $A = \frac{P}{\sigma} = \frac{132.0\ kN}{100\ kN \cdot m^2} = 1.32\ \frac{m^2}{m}$ de longitud

Ancho de cimentación = 1.32 m que se aproxima a 1.35 m.

Reacción en kN/m^2 productora de flexión y cortante:

Corresponde a la reacción total a la cual se le descuenta la correspondiente al peso propio del cimiento por considerarlo íntegramente apoyado sobre el estrato de fundación y la denominamos σ neta:

$$\sigma \text{ neta} = \frac{Pm}{\text{Area real}} = \frac{120.0\,kN}{1.35\ m * 1.00\ m} = 88.89\,kN/m^2$$

Flexión:

Se debe calcular en la mitad de la distancia entre el centro y el borde del muro para un metro de longitud:

$$M = \frac{88.89 * 1.00 * 0.6125^2}{2} = 16.67\ kN{\cdot}m$$

En la suposición de que no hay limitación de altura, se adopta la correspondiente a una armadura menor, que para este caso con acero de alta resistencia puede ser de ρ = 0.0020.

Por tanto:

$$d = k2\sqrt{\frac{M}{b}} \qquad \text{con k2} = 0.0559 \text{ para } \rho = 0.0020$$

$$d = 0.0559 * \sqrt{\frac{16.67}{1.00}} = 0.228\ m \sim 0.23\ m.$$

Utilizando la especificación del recubrimiento en 75 mm para concreto colocado directamente sobre el suelo, el espesor resulta de 0.31 m que se aproxima a 0.35 m.

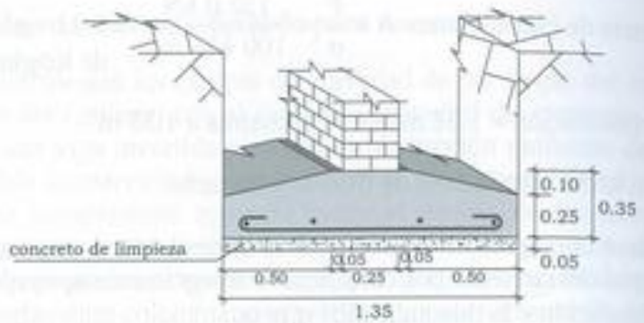


Figura 8.3

Por consiguiente, el nuevo "d" resulta de 0.26 m, que implica un refuerzo menor de $A_s = 0.0020*1.00*0.26 = 0.00052\ m^2$. Sin embargo, esta armadura no puede ser inferior al requerimiento para armadura mínima en losas de espesor uniforme, que para este tipo resulta de:

A_s mínimo $= 0.0018*1.00*0.35 = 0.00063\ m^2/m \sim 630\ mm^2/m$

∴ Armadura transversal: ϕ 3/8" c/0.11 m

Como armadura longitudinal se colocarán pasadores constructivos, antes que armadura de repartición, contracción de fraguado o temperatura:

∴ Armadura longitudinal: 4 ϕ 3/8" igualmente espaciadas.

Se disminuye el espesor de la losa de 0.35 m a 0.25 m, que es una aproximación por exceso de la especificación del Reglamento NSR-10 según la cual "…la altura de la zapata sobre el refuerzo inferior no debe ser menor de 150mm para zapatas apoyadas sobre el suelo…".

Cortante:

Se calcula a una distancia "d" a partir del borde del muro (figura 8.4).

$V(d) = 88.89*0.29*1.00 = 25.78kN$

$V_u = 1.5*25.78 = 38.67kN$

Se corrige la nueva altura efectiva en la sección de cálculo:

$$x = \frac{0.10}{0.50} * 0.29 = 0.058\ m \sim 0.06\ m.$$

$\therefore d = 0.26 - (0.10 - 0.06) = 0.22\ m$

$\phi V_c = \phi 0.17\sqrt{f'_c} b_o d = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*1.0*0.22*1000 = 128.75\ kN$

$V_u < \phi V_c$

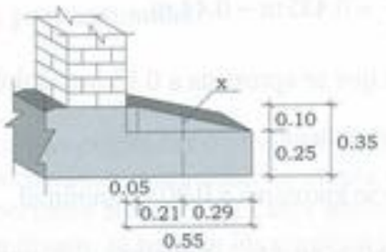


Figura 8.4

En el diseño de este tipo de cimientos se trata de evitar la colocación de refuerzo a cortante, trabajando con espesores de cimentación apropiados.

Una mejora sustancial en el funcionamiento del cimiento anterior se logra si se especifica, en conjunto con el ingeniero consultor de suelos y fundaciones, su trabajo como puente de la carga en una luz de falla, la cual tendría que relacionarse con las características del estrato portante; en este caso, se trabajaría como una viga T invertida adicionándole al diseño anterior el nervio necesario. Suponiendo en el diseño anterior una luz de falla de 1.50 m y un funcionamiento transversal semejante al calculado, desde el punto de vista longitudinal se tiene:

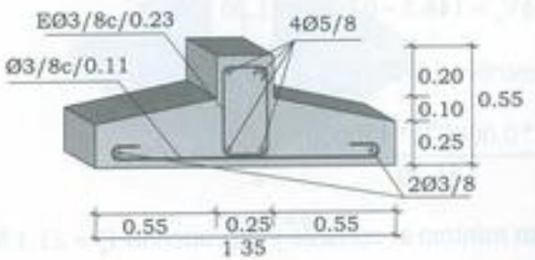


Figura 8.5

Flexión:

$$M = \frac{132.0 * 1.50^2}{12} = 24.75 \text{ kN·m}$$

Se adopta la altura necesaria para tener ρ mínima = 0.0033:

$$d = 0.0437\sqrt{\frac{24.75}{0.25}} = 0.435\,\text{m} \sim 0.44 \text{ m.}$$

Por lo tanto h = 0.53 m que se aproxima a 0.55 m y d = 0.46 m.

Con este valor de "d" se obtiene:

ρ = 0.002957, que se aproxima a 0.0033 (mínima).

$\therefore$ $A_s = 0.0033 * 0.25 * 0.47 = 0.000388\ m^2 \sim 388\ mm^2$. Se coloca 2 ϕ 5/8" en la parte superior del nervio de la viga de cimentación; en la parte inferior y por tratarse de la cuantía mínima se coloca también la misma armadura: 2 ϕ 5/8".

Cortante:

Se calcula al borde del apoyo supuesto:

$$V = \frac{1}{2} * 132.0 * 1.50 = 99 \text{ kN}; \quad V_u = 1.5 * 99 = 148.5 \text{ kN}$$

$$\phi V_c = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 0.25 * 0.46 * 1000 = 67.30 \text{ kN}$$

$$\phi V_s = V_u - \phi V_c = 148.5 - 67.30 = 81.20 \text{ kN}$$

Utilizando estribos ϕ 3/8":

$$s = \frac{0.75 * 2 * 0.000071 * 420000 * 0.46}{81.20} = 0.253 \text{ m}$$

Para refuerzo mínimo al cortante y un concreto $f'_c = 21.1$ MPa:

$$s_{max} = \frac{A_{v\min} f_{yt}}{0.35 b_w} = \frac{2 * 71 * 420}{0.35 * 250} = 682 \text{ mm} \sim 0.68 \text{ m}$$

Por lo tanto se colocara ε ϕ 3/8"c/0.23 (d/2 = 0.23 m) en toda la longitud del cimiento.

Cimentación aislada para columnas

Zapatas aisladas cuadradas

Las zapatas para columnas cuadradas o circulares con carga axial se harán cuadradas y su comportamiento estructural se acepta como el de losas con voladizos en dos direcciones sometidas a carga uniforme del terreno hacia arriba. Para efectos de diseño, se tendrán los siguientes aspectos:

Flexión:

El momento máximo para una zapata se calculará en una sección localizada en la cara de la columna; por tanto, el momento externo en el plano "ce" se determinará calculando el momento de las fuerzas que actúan sobre la totalidad del área de la zapata "abce". Igualmente, el momento externo en el plano "fg" se calculará a partir de las fuerzas que actúan sobre el área "bfgh". Debe notarse la porción de área tomada dos veces para efectos de esta determinación del momento.

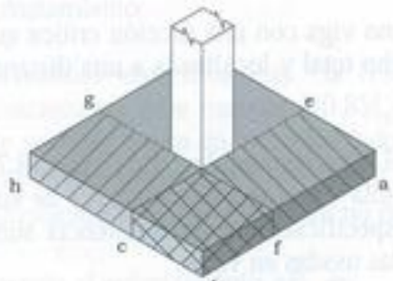


Figura 8.6

Cortante:

Existen dos maneras de revisar el esfuerzo cortante:

a) Para zapatas y también para losas con comportamiento en dos direcciones con una sección critica perpendicular al plano de la losa localizada en una distancia d/2 del borde de la columna puede calcularse como el área de la corona correspondiente (fig 8.7) sometida a las fuerzas que actúan en ella y sus respectiva sección resistente. El valor de ϕV_c será el menor de las siguientes expresiones:

$$\phi V_c = \phi\ 0.17\sqrt{f'_c}\left(1+\frac{2}{\beta}\right)b_o d$$

donde β es la relación del lado largo al lado corto de la columna, la carga concentrada o el área de reacción y b_o es el perímetro de la sección crítica para cortante,

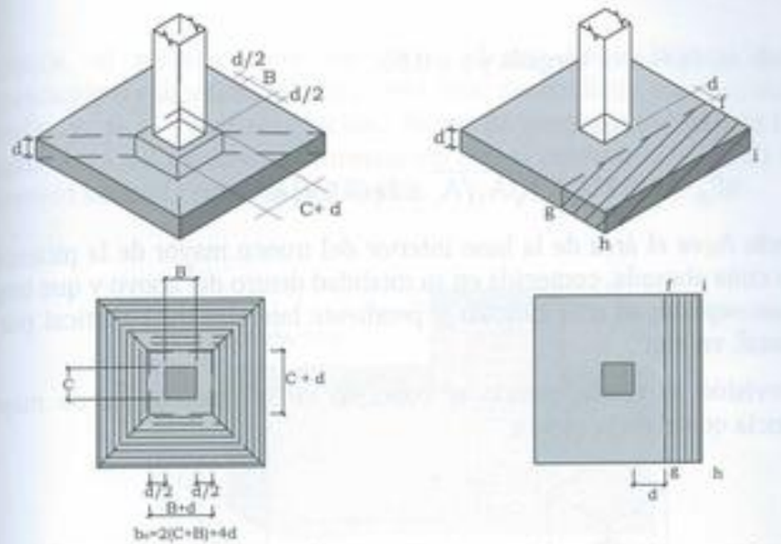
$$\phi V_c = \phi 0.083\left(\frac{\alpha_s d}{b_o}+2\right)\sqrt{f'_c}b_o d$$

Donde α_s es 40 para columnas interiores, 30 para columnas de borde y 20 para columnas esquina, y

$$\phi V_c = \phi 0.33\sqrt{f'_c}b_o d$$

b) La llamada acción como viga con una sección crítica que se extiende en un plano a través del ancho total y localizada a una distancia "d" del borde de la columna.

Puede calcularse como el área rectangular "fghi" (fig. 8.7) sometida a las fuerzas que actúan sobre ella y una sección resistente de ancho igual a "fg". Para este chequeo, las especificaciones de resistencia suministrada por el concreto corresponden a las usadas en vigas.



Area contribuyente accion como losa en dos direcciones

Area contribuyente accion como viga

Figura 8.7

Transmisión de los esfuerzos en la columna a la zapata.

Esta transmisión se efectúa en dos aspectos: la resistencia al aplastamiento en la base de la columna de la parte de la zapata en compresión bajo ella y la transmisión del esfuerzo que traen las barras al concreto de la zapata.

a) Resistencia al aplastamiento:

El Reglamento colombiano especifica que "la resistencia de diseño al aplastamiento del concreto no debe exceder $\phi(0.85f'_cA_1)$ excepto cuando la superficie de soporte sea más ancha en todos los lados que el área cargada, en cuyo caso se permite que la resistencia de diseño al aplastamiento en el área cargada sea multiplicada por $\sqrt{A_2/A_1}$, pero no más que 2"

Por lo tanto, la resistencia al aplastamiento ϕP_{nb} es:

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85f'_cA_1)$$

en donde A_1 es el área cargada y $\phi = 0.65$.

Para el caso de la zapata:

$$\phi P_{sb} = \phi(0.85f'_c A_1)\sqrt{A_2/A_1} \leq 2\phi(0.85f'_c A_1)$$

en donde A_2 es el área de la base inferior del tronco mayor de la pirámide, cono o cuña abusada, contenida en su totalidad dentro del apoyo y que tenga por base superior el área cargada y pendiente laterales de 1 vertical por 2 horizontal, en mm^2.

Esta revisión es obvia cuando el concreto de la columna es de mayor resistencia que el de la zapata.

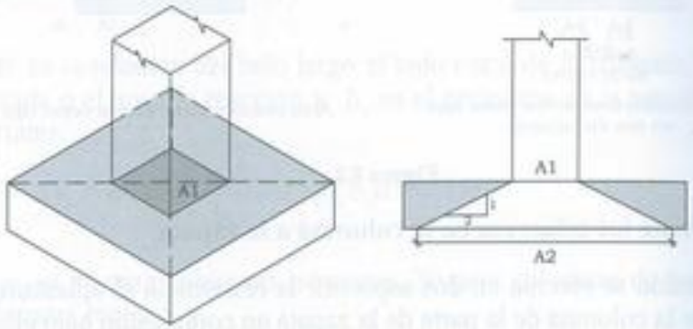


Figura 8.8a

b) Longitud de desarrollo del refuerzo de la columna.

Por otra parte, los hierros de la columna deben transmitir el esfuerzo que traen a la zapata por medio de suficiente longitud de anclaje de estos hierros en la zapata; esta longitud debe ser mayor que la longitud de desarrollo necesaria para barras en compresión y en algunos casos se convertirá en un factor determinante de la altura de estos elementos de cimentación. Los extremos de las barras deben terminarse en ángulo recto con el eje de las barras, sin que la parte horizontal sea computable en el cálculo de la longitud de anclaje arriba mencionada. Sin embargo, en las columnas y muros estructurales que resisten las fuerzas inducidas por los efectos

sísmicos, el refuerzo debe extenderse dentro de la zapata, losa de cimentación o cabezal de pilotes y debe estar desarrollado por tracción en la interfaz y, si se requiere ganchos, deben proporcionarse ganchos de 90 grados cerca del fondo de la cimentación con el extremo libre de las barras orientado hacia el centro de la columna.

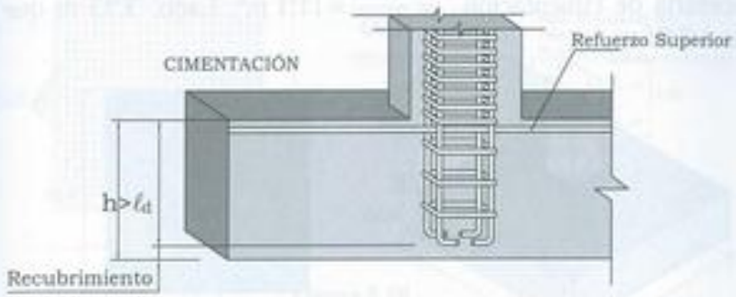


Figura 8.8b

A continuación un ejemplo de diseño.

Problema 8.2

Diseñar la zapata para una columna de 0.40 x 0.40 m. que soporta una carga axial de 1000 kN estando reforzada con 8 ϕ 5/8" en un estrato de fundación cuya presión de trabajo es de 0.1 MPa, empleando concreto de f'_c = 21.1 MPa para la columna y la zapata y refuerzo para f_y = 240 MPa.

Solución

Se dimensiona la zapata en planta para diseñarla luego a flexión y cortante, y finalmente confirmar la transmisión de los esfuerzos de la columna a la zapata.

Dimensionamiento en planta:

Cargas:

De columna	=	1000 kN
Peso propio zapata (supuesto 11%)	=	110 kN
Total	=	1110 kN

Area necesaria de cimentación $= \frac{1110}{100} = 11.1\ m^2$. Lado: 3.33 m que se aproxima a 3.35 m

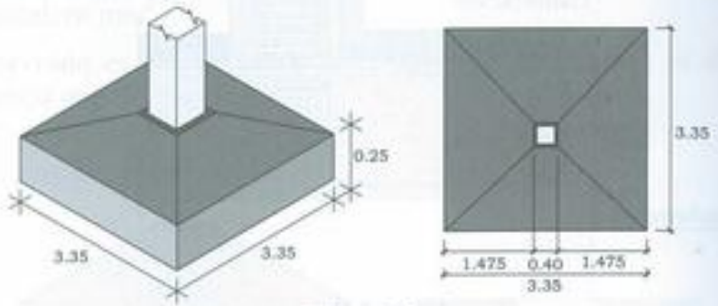


Figura 8.9

Presión neta = σ neta = reacción que produce flexión

y cortante $= \frac{1000}{3.35 * 3.35} = 89.11\ kN/m^2$

Flexión:

M al borde de la columna: $\frac{89.11 * 3.35 * 1.475^2}{2} = 324.7\ kN{\cdot}m$

$\phi M_n = 1.5 * 324.7 = 487.05\ kN{\cdot}m$

Con el criterio de adoptar un espesor para la zapata de manera que el refuerzo a colocar sea aproximadamente el mínimo, se puede usar una cuantía $\rho = 0.0025$ para la cual resulta d = 0.52 m

Por tanto, para una altura h de 0.61 m que aproximamos a 0.60 m y d = 0.51 m, resulta:

$A_s = 0.002636 * 3.35 * 0.51 = 0.004504\ m^2 \sim 4504\ mm^2$

La armadura mínima para esta losa corresponde a la especificación de retracción y variación de temperatura, que se calcula así:

A_s mínima $= 0.0020 * 3.35 * 0.60 = 0.04020\ m^2 \sim 4020\ mm^2$

$\therefore$ Se coloca 23 ϕ 5/8" c/0.145 en cada dirección.

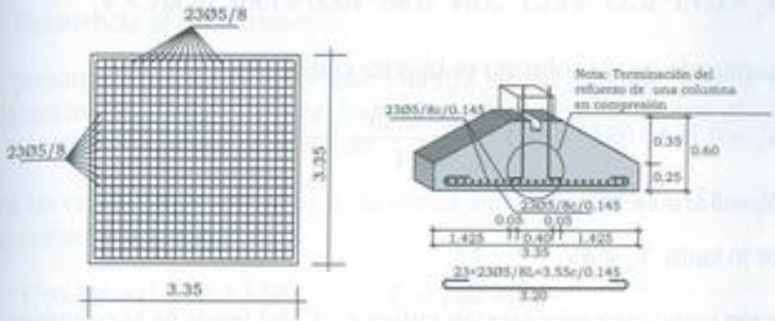


Figura 8.10

Cortante:

a) Acción en dos direcciones para sección crítica a "d/2" del borde de la columna:

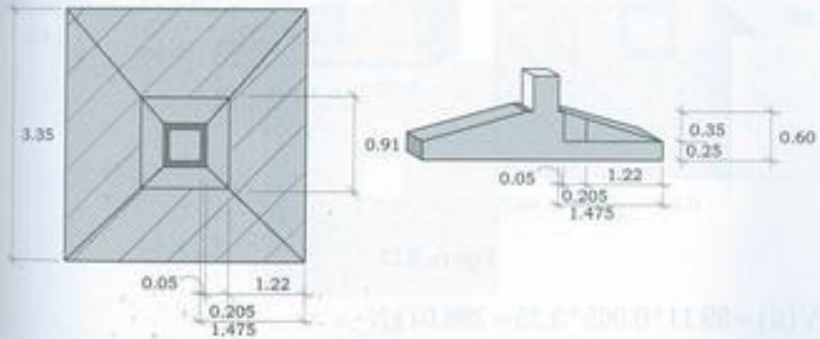


Figura 8.11

$V\left(\frac{d}{2}\right) = 89.11 * \frac{1}{2}(0.91 + 3.35) * 1.22 * 4 = 926.24\ kN$

$V_u = 1.5 * 926.24 = 1389.36 kN$

$$d = 0.51 - \left(0.35 - \frac{0.35 * 1.22}{1.425}\right) = 0.46\ m$$

Para $\beta = 1$, $\phi V_c = 0.75 * 0.33 \sqrt{f'_c} b_o d$

$$\phi V_c = 0.75 * 0.33 * \sqrt{21.1} * 3.64 * 0.46 * 1000 = 1902.16\ kN > V_u$$

Asumiendo que la columna es interior con α_s=40

$$\phi V_c = 0.75 * 0.083 * \sqrt{21.1} * \left(\frac{40 * 0.46}{3.64} + 2\right) * 3.64 * 0.46 * 1000$$

$$\phi V_c = 3372.88\ kN$$

Por lo tanto, $V_u < \phi V_c$

b) Acción como viga para sección crítica a "d" del borde de la columna:

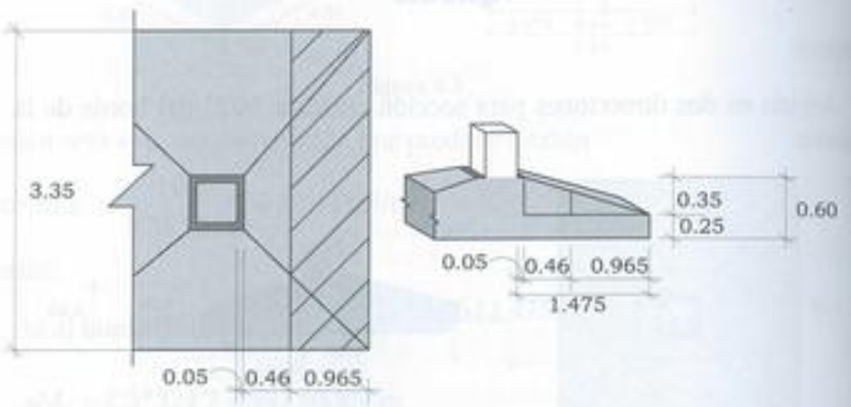


Figura 8.12

$$V(d) = 89.11 * 0.965 * 3.35 = 288.07\ kN$$

$$V_u = 1.5 * 288.07 = 432.11 kN$$

$$d = 0.51 - \left(0.35 - \frac{0.35 * 0.965}{1.425}\right) = 0.40\ m$$

$$\phi V_c = \phi 0.17 \sqrt{f'_c} b_w d = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 3.35 * 0.40 * 1000 = 784.20\ kN$$

$$V_u < \phi V_c$$

Transmisión de los esfuerzos de la columna a la zapata

a) Resistencia al aplastamiento:

Se presenta aquí solo como una muestra de su cálculo, puesto que su utilización apropiada corresponderá al caso de una columna con el concreto de mayor resistencia al de la zapata.

Para las condiciones del ejemplo, se revisa la transferencia en la interface de la columna y la zapata:

f'_c(columna) = 21.1 MPa f_y = 240 MPa

f'_c(zapata) = 21.1 MPa $P_u = 1.5 * 1000 = 1500\ kN$

Resistencia al aplastamiento en la base de la columna:

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85 f'_c A_1) = 0.65 * (0.85 * 21100 * 0.40 * 0.40) = 1865\ kN > P_u$$

Resistencia al aplastamiento de la zapata:

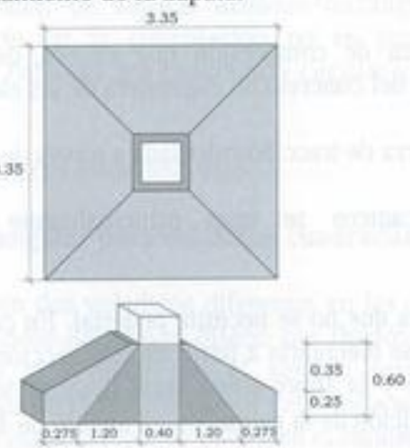


Figura 8.13

La resistencia al aplastamiento de la zapata se aumenta por un factor $\sqrt{A_2/A_1} \le 2$ debido al área mayor correspondiente a la base inferior del tronco mayor de la pirámide, para este caso, contenida en su totalidad dentro del apoyo y que tenga por base superior el área cargada y pendientes laterales de 1 vertical por 2 horizontal:

$$A_2 = (1.20 + 0.40 + 1.20) * (1.20 + 0.40 + 1.20) = 7.84 \text{ m}^2.$$

Por lo tanto $\sqrt{A_2/A_1} = \sqrt{7.84/0.16} = 7.0 > 2$. Se debe usar 2.

La presión de aplastamiento en el concreto de la columna será prioritaria hasta exceder dos veces la del concreto de la zapata.

Resistencia al aplastamiento del área cargada de la zapata

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85 f'_c A_1)2 = 0.65 * (0.85 * 21100 * 0.40 * 0.40) * 2 = 3730 \text{ kN} > P_u$$

Por otra parte el requisito contenido en la sección C.15.8.1.2 del Reglamento colombiano en el sentido del refuerzo requerido o los conectores mecánicos entre los elementos apoyados, en este caso columna y zapata, "deben ser adecuados para transmitir:

a) Toda la fuerza de compresión que exceda de la resistencia al aplastamiento del concreto de cualquiera de los elementos.

b) Cualquier fuerza de tracción calculada a través de la interfaz"

Los conectores mecánicos se usan principalmente para estructuras prefabricadas.

Este resultado significa que no se necesita pedestal. En caso de necesitarse, su dimensionamiento se efectuaría a partir de una sección conveniente para una presión admisible y la sobre-altura sería igual al sobre-ancho con la suposición de la repartición de la carga con un ángulo de 45°.

b) Longitud de desarrollo del refuerzo de la columna:

La longitud de anclaje de estos hierros en la zapata debe ser mayor que la longitud de desarrollo necesaria para las barras en compresión, que para barras corrugadas es:

$$\ell_{dc} = \left(\frac{0.24 f_y}{\sqrt{f'_c}}\right) d_b \ge (0.043 f_y) d_b$$

En este caso para ϕ 5/8" con $f_y = 240$ MPa y $f'_c = 21.1$MPa se obtiene $\ell_{dc} = 200$ mm (véase tabla 4.21), de manera que para el espesor adoptado de la zapata se tiene un buen margen en cuanto a la necesidad de longitud de anclaje.

Finalmente, y como en el problema anterior, se aclara que se ha disminuido el espesor de la zapata de 0.65 m a 0.25 m con la aproximación por exceso de la especificación del Reglamento según la cual el espesor del concreto por encima del refuerzo debe ser superior a 0.15 m.

Zapatas aisladas rectangulares

Se presentan dos casos de zapatas aisladas rectangulares: cuando por limitación de espacio en la cimentación no es posible hacer zapatas cuadradas aunque la columna sea cuadrada o circular y cuando la columna es rectangular.

A continuación se tratarán estos dos casos:

Zapata aislada rectangular para columnas cuadradas o circulares

En este caso, se tienen dos voladizos diferentes en las dos direcciones, por lo que teóricamente debe hacerse el diseño por flexión y cortante en cada dirección colocando el refuerzo en el sentido mayor uniformemente espaciado, en tanto que en el sentido menor debe colocarse de acuerdo a una especificación del Reglamento que se tratará en el siguiente ejemplo:

Problema 8.3

Diseñar la zapata para la columna del problema 8.2, si la dimensión de la zapata en una dirección, por limitación de espacio en la cimentación, no puede ser mayor de 2.75 m.

Solución

Se obtiene el área de la cimentación en forma idéntica al problema 8.2 dimensionándola de manera que uno de sus lados no exceda de 2.75 m y luego se diseña a flexión y cortante.

Cargas

De columna	=	1000 kN
Peso propio zapata (supuesto 11%)	=	110 kN
Total	=	1110 kN

$$\text{Area necesaria de cimentación} = \frac{1110}{100} = 11.1 \text{ m}^2.$$

Para una dimensión de 2.75 m, se obtiene la otra como:

$$L = \frac{11.10}{2.75} = 4.04\,\text{m} \sim 4.00\,\text{m}$$

σ neta = reacción que produce flexión y cortante

$$\sigma \text{ neta} = \frac{1000}{2.75 * 4.00} = 90.91\,\text{kN/m}^2$$

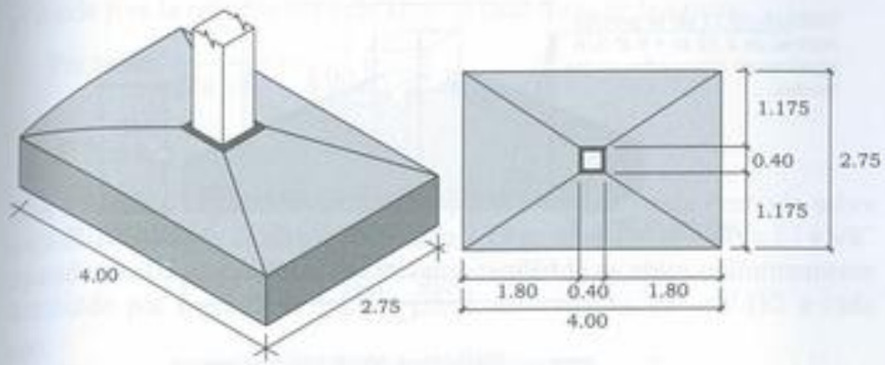


Figura 8.14

Flexión:

Aunque teóricamente se debería diseñar para ambos voladizos, con el criterio de adoptar un espesor de la zapata de manera que el refuerzo a colocar sea aproximadamente el mínimo, se utiliza el voladizo mayor que corresponde al sentido mayor:

$$\text{M flexión} = \frac{90.91 * 2.75 * 1.80^2}{2} = 405.0\,\text{kN·m}$$

$\phi M_n = 1.5 * 405 = 607.5\text{kNm}$

y la altura efectiva para $\rho = 0.0025$ resulta de "d"=0.64m.

Tomando h = 0.75m y d = 0.66 m, resulta, en forma aproximada:

$A_s = 0.002387 * 2.75 * 0.66 = 0.004332\ \text{m}^2 \sim 4332\ \text{mm}^2$

La armadura mínima para esta losa corresponde a la especificación de retracción y variación de temperatura, que se calcula así:

$A_s = 0.0020 * 2.75 * 0.75 = 0.004125\ \text{m}^2 \sim 4125\ \text{mm}^2$

$\therefore$ Armadura en el sentido mayor: 22 ϕ 5/8" c/0.125

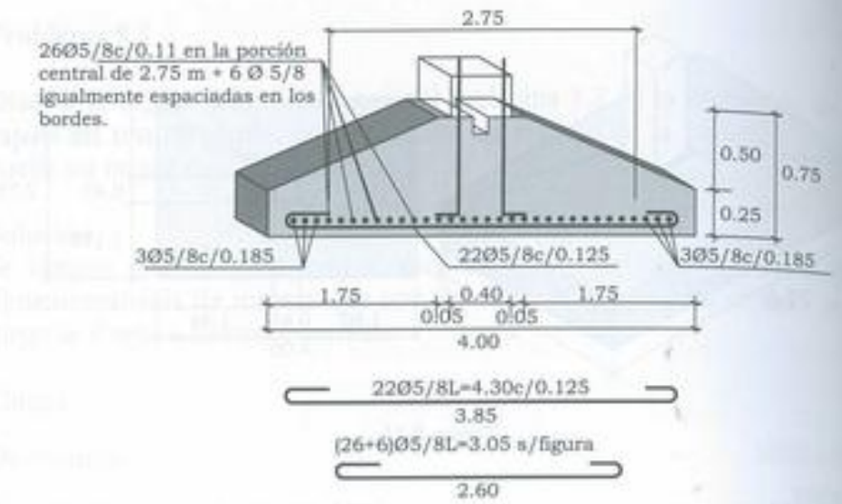


Figura 8.15

Sentido menor:

Para la altura adoptada de acuerdo con el voladizo mayor, en el sentido del voladizo menor se coloca la misma armadura o la armadura mínima, según el caso:

$A_s = 0.002387*4.00*0.65 = 0.006206\ m^2\ (6206\ mm^2)$

$A_{s\,min} = 0.0020*4.00*0.75 = 0.0060\ m^2\ (6000\ mm^2)$

Se coloca $32\,\phi\,5/8"$.

Este refuerzo se distribuye siguiendo el requisito del Reglamento colombiano que especifica para una parte del refuerzo total una separación uniforme en una franja centrada sobre el eje de la columna igual a la longitud del lado corto de la zapata y para el resto del refuerzo requerido en la dirección corta una distribución uniforme por fuera del ancho de la franja central, en un todo de acuerdo a la expresión:

$$\frac{\text{Refuerzo a colocar en la franja central}}{\text{Refuerzo total en el sentido menor}} = \frac{2}{\beta+1}$$

en donde β es la relación del lado largo al lado corto de la zapata

Por tanto: $\dfrac{x}{32\phi 5/8"} = \dfrac{2}{\frac{4.00}{2.75}+1}$

de donde x = 27 barras ϕ 5/8"

Estas 27 barras se distribuyen uniformemente en una franja centrada sobre el eje de la columna de un ancho igual a 2.75 m, es decir, se coloca 27 ϕ5/8" separadas 0.105 m y el resto del refuerzo requerido se ubica uniformemente distribuido por fuera de la franja central, es decir, 3 ϕ 5/8" c/0.185 a cada lado.

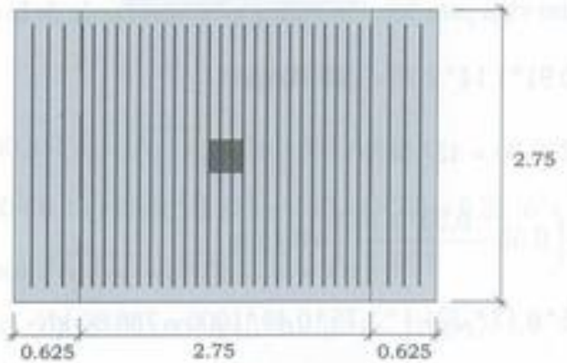


Figura 8.16a

Esfuerzo cortante:

a) Acción en dos direcciones para sección crítica a "d/2" del borde de la columna:

A d/2 del borde de la columna b_1 será = 0.40 + 2*0.215 = 0.83 m

b_2 será = 0.40 + 2*0.505 = 1.41 m

$$V\left(\frac{d}{2}\right) = 90.91*\frac{1}{2}\left[(0.83+2.75)*1.47+(1.41+4)*.845\right]*2$$

$$V\left(\frac{d}{2}\right) = 893.64\ kN$$

$V_u = 1.5*893.64 = 1340.46 kN$

$$d = 0.66 - \left(0.50 - \frac{0.50 * 1.47}{1.75}\right) = 0.58 \text{ m}$$

Para $\beta = 1$,

$$\phi V_c = \phi\ 0.33\sqrt{f'_c} b_o d = 0.75 * 0.33 * \sqrt{21.1} * (0.83 + 1.41) * 2 * 0.58 * 1000$$

$$\phi V_c = 2951.85 \text{ kN}$$

$$V_u < \phi V_c$$

b) Acción como viga para sección crítica a "d" del borde de la columna:

$$V(d) = 90.91 * 1.14 * 2.75 = 285.00 \text{ kN}$$

$$V_u = 1.5 * 285.00 = 427.5 \text{kN}$$

$$d = 0.66 - \left(0.50 - \frac{0.50 * 1.14}{1.75}\right) = 0.49 \text{ m}$$

$$\phi V_c = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 2.75 * 0.49 * 1000 = 788.60 \text{ kN}$$

$$V_u < \phi V_c$$

Transmisión de los esfuerzos de la columna a la zapata

a) Resistencia al aplastamiento: igualmente se presenta sólo como una muestra de su cálculo ya que el concreto en este caso, es de igual resistencia en la columna y en la zapata.

$$P_u = 1500 \text{ kN}$$

Resistencia al aplastamiento en la base de la columna:

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85 f'_c A_1) = 0.65 * (0.85 * 21100 * 0.40 * 0.40) = 1865 \text{ kN} > P_u$$

Resistencia al aplastamiento en la zapata:

Figura 8.16b

$$\phi P_{nb} = \phi\ (0.85 f'_c A_1)\sqrt{A_2/A_1} \le 2\phi(0.85 f'_c A_1)$$

$$A_2 = (1.50 + 0.40 + 1.50) * (1.175 + 0.40 + 1.175) = 9.35 \text{ m}^2$$

Por lo tanto $\sqrt{A_2/A_1} = \sqrt{9.35/0.16} = 7.6 > 2$

$$\phi P_{nb} = 0.65 * (0.85 * 21100 * 0.40 * 0.40) * 2 = 3730 \text{ kN} > P_u$$

b) Longitud de desarrollo del refuerzo de la columna:

Para este tema, el resultado obtenido en el problema 8.2 es aplicable.

Como conclusión de la presente solución, y con base en la especificación de colocación del refuerzo para resolver una posible repartición de los esfuerzos que no está acorde con la solución de zapata rectangular cuando la columna es cuadrada o circular, se recomienda que se adopte esta solución sólo cuando sea estrictamente necesario.

Zapatas aisladas rectangulares para columnas rectangulares

Siendo las columnas rectangulares las más frecuentes, este tipo de zapata resulta de máxima ocurrencia en la construcción de edificios. Para su diseño, se trata de igualar los voladizos en ambas direcciones, así:

$$\frac{1}{2}(L-a)=\frac{1}{2}(L_1-a_1) \quad \therefore \quad L-L_1=a-a_1$$

Siendo A = área $= \frac{\Sigma P}{\sigma} = L \cdot L_1$

$$\therefore L-\frac{A}{L}=a-a_1$$

$$L^2-(a-a_1)*L-A=0$$

$$\therefore L=\frac{1}{2}(a-a_1)+\sqrt{\frac{1}{4}(a-a_1)^2+A}$$

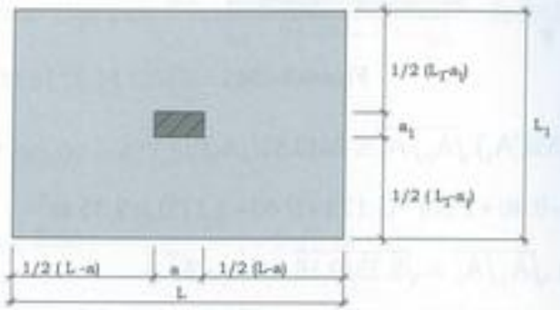


Figura 8.17

Una vez igualados los voladizos, se hará el diseño para uno de ellos colocando igual armadura en ambos, de acuerdo al siguiente ejemplo.

Problema 8-4

Diseñar la zapata para la columna del problema 8.2, si ahora se supone de 0.25 x 0.65 m e iguales condiciones de terreno y materiales.

Solución

Se obtiene el área de la cimentación en forma idéntica al problema 8.2, dimensionándola de manera que se igualen los voladizos en ambas direcciones.

Cargas: De columna: = 1000 kN

Peso propio (supuesto 11%) = 110 kN

Carga total: = 1110 kN

Area necesaria de cimentación $= \frac{1110}{100} = 11.1 \text{ m}^2$

Aplicando la expresión obtenida arriba:

$$L=\frac{1}{2}(0.65-0.25)+\sqrt{\frac{1}{4}(0.65-0.25)^2+11.1}$$

$\therefore L = 3.54$ m, de donde:

$$L_1=\frac{11.1}{3.54}=3.14 \text{ m}$$

Se adopta L = 3.50 m y L_1 = 3.10 m

$$\sigma \text{neta} = \frac{1000}{3.10*3.50} = 92.17 \text{ kN/m}^2$$

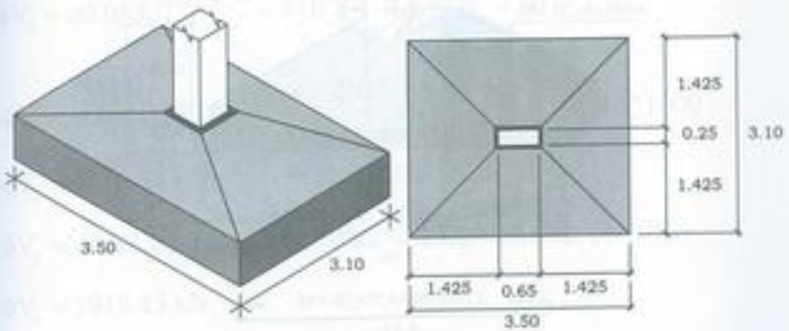


Figura 8.18

Flexión

$$\text{M borde columna} = \frac{92.17*3.10*1.425^2}{2} = 290.10 \text{ kN·m}$$

$\phi M_n = 1.5*290.10 = 435.15 kN\cdot m$

Con el mismo criterio de adoptar un espesor para la zapata de manera que el refuerzo a colocar sea aproximadamente el mínimo, se usa:

$\rho = 0.0025$ y se obtiene $d = 0.51$ m

Por lo tanto, $h = 0.60$ m:

$A_s = 0.002543*3.10*0.51 = 0.004020\ m^2 \sim 4020\ mm^2$

La armadura mínima para esta losa corresponde a la especificación de retracción de fraguado y variación de temperatura, que se calcula así:

$A_s = 0.0020*3.10*0.60 = 0.00372\ m^2 \sim 3720\ mm^2$

∴ Armadura: 21 ϕ 5/8" c/0.145 en el sentido de 3.50 m
24 ϕ 5/8" c/0.145 en el sentido de 3.10 m

Por consiguiente, igualados los voladizos, se hace el diseño para uno de ellos y se coloca igual armadura en ambos.

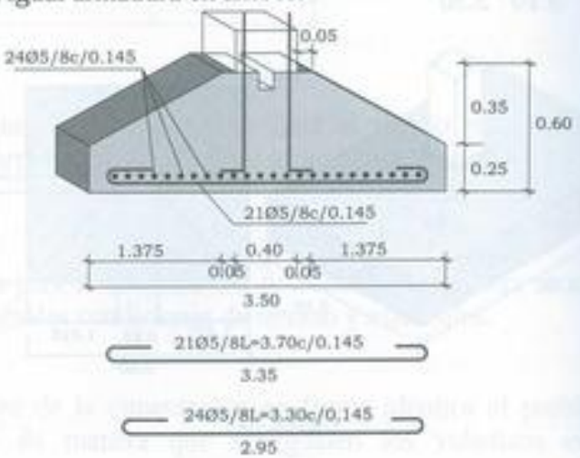


Figura 8.19a

Esfuerzo cortante

Acción en dos direcciones para sección crítica a "d/2" del borde de la columna:

A d/2 del borde de la columna b_1 será: 0.25 + 2*0.51/2 = 0.76 m
b_2 será: 0.65 + 2*0.51/2 = 1.16 m

$V(d/2)=92.17*1/2*[(0.76+3.10)*1.17+(1.16+3.5)*1.17]*2 = 918.93 kN$

$V_u = 1.5*918.93 = 1378.40 kN$

$$d = 0.51-\left(0.35-\frac{0.35*1.12}{1.375}\right) = 0.44\ m$$

$$\phi V_c = \phi 0.17\sqrt{f'_c}\left(1+\frac{2}{\beta}\right)b_o d \quad \text{donde } \beta = \frac{0.65}{0.25} = 2.60$$

$$\phi V_c = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*\left(1+\frac{2}{2.6}\right)*3.84*0.44*1000 = 1750.17\ kN$$

$$\phi V_c = \phi 0.083\sqrt{f'_c}\left(\frac{\alpha_s d}{b_o}+2\right)b_o d \quad \text{donde } \alpha_s = 40$$

$$\phi V_c = 0.75*0.083*\sqrt{21.1}*\left(\frac{40*0.44}{3.84}+2\right)*3.84*0.44*1000$$

$$\phi V_c = 3176.59\ kN$$

$$\phi V_c = \phi 0.33\sqrt{f'_c}\,b_o d = 0.75*0.33*\sqrt{21.1}*3.84*0.44*1000$$

$$\phi V_c = 1919.43\ kN$$

∴ Por lo tanto $V_u < \phi V_c$

Acción como viga para sección crítica a "d" del borde de la columna:

$V(d) = 92.17*0.915*3.10 = 261.44\ kN$

$$V_u = 1.5*261.44\ \text{kN} = 392.16\ \text{kN}$$

$$d = 0.51 - \left(0.35 - \frac{0.35*0.915}{1.375}\right) = 0.39\ \text{m}$$

$$\phi V_c = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*3.10*0.39*1000 = 707.53\ \text{kN}$$

$\therefore$ Por lo tanto $V_u < \phi V_c$

Transmisión de los esfuerzos de la columna a la zapata

a) Resistencia al aplastamiento: también, en este caso, se muestra como una rutina del proceso

$P_u = 1500\ \text{kN}$

Resistencia al aplastamiento en la base de la columna:

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85 f'_c A_1) = 0.65*(0.85*21100*0.25*0.65) = 1894\ \text{kN} > P_u$$

Resistencia al aplastamiento en la zapata:

Figura 8.19b

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85 f'_c A_1)\sqrt{A_2/A_1} \le 2\phi(0.85 f'_c A_1)$$

$$A_2 = (1.20+0.65+1.20)*(1.20+0.25+1.20) = 8.08\ \text{m}^2$$

Por lo tanto $\sqrt{A_2/A_1} = \sqrt{8.08/0.16} = 7.1 > 2$

$$\phi P_{nb} = 0.65*(0.85*21100*0.25*0.65)*2 = 3788\ \text{kN} > P_u$$

b) Longitud de desarrollo del refuerzo de la columna:

Para este tema, el resultado obtenido en el problema 8.2 es aplicable.

En los ejemplos anteriores se ha trabajado la cimentación aislada para columnas en el evento de sólo carga axial como una introducción al lector a este tema. A continuación se tratará el caso usual de cimentaciones para columnas con carga axial y momento flector.

Zapatas con carga axial y momento de flexión

En la mayoría de los casos la carga axial de las columnas va acompañada de un momento flector en la base y a veces también de una fuerza horizontal, produciéndose una excentricidad que se evalúa así:

$$e = \frac{M + H \cdot h}{P}$$

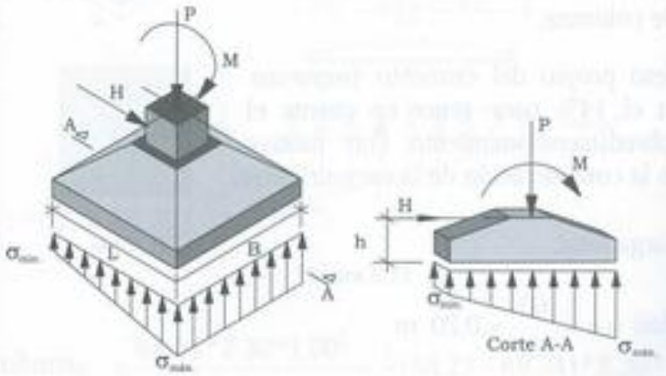


Figura 8.20

En este caso, las reacciones del terreno se calculan:

$$\sigma_{min}^{max} = \frac{P}{L \cdot B}\left(1 \pm \frac{6e}{L}\right)$$

La diferencia entre las reacciones máximas y mínima dependerá de la excentricidad.

Para el caso de edificios de normal ocurrencia, la excentricidad debe esencialmente considerarse y con mayor razón en aquellas construcciones con una carga P poco considerable que implica una mayor excentricidad.

Problema 8.5

Diseñar la zapata para una columna de 0.30 x 0.30 m que soporta una carga axial de 300 kN y un momento de 60 kN·m, estando reforzada con 4 ϕ 5/8"+4 ϕ 1/2", en un estrato de fundación cuya presión de trabajo es de 0.1 MPa, empleando concreto de $f'_c = 21.1$ MPa y refuerzo para $f_y = 240$ MPa.

Solución

Dimensionamiento en planta:

Cargas	De columna:	=	300 kN
	Peso propio del cimiento (supuesto en el 14% para tener en cuenta el sobredimensionamiento con motivo de la consideración de la excentricidad)	=	42 kN
	Carga total: ΣP	=	342 kN

$$\text{Excentricidad} = e = \frac{60}{300} = 0.20 \text{ m}$$

Suponiendo reacción uniforme del terreno:

$$\text{Area cimentación} = \frac{342}{100} = 3.42 \text{ m}^2 \qquad \therefore L = 1.85 \text{ m}$$

Por un proceso de ensayos sucesivos se llega a L = 2.30 m

De donde:

$$\sigma_{min}^{max} = \frac{342}{2.30 * 2.30}\left(1 \pm \frac{6 * 0.20}{2.30}\right)$$

$\therefore \sigma_{max} = 98.27$ kN/m² y $\sigma_{min} = 31.03$ kN/m²

Flexión

Se considera el caso más desfavorable admitiendo la posibilidad de la inversión del sentido del momento y descontándole el peso propio del cimiento, resulta:

$$\sigma_f = 31.03 + \frac{1.30}{2.30}(98.27 - 31.03) = 69.04 \text{ kN/m}^2$$

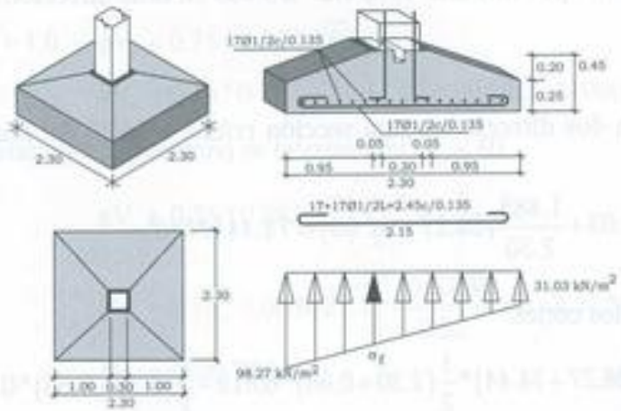


Figura 8.21

$$\text{M borde columna} = \frac{69.04 * 2.30 * 1.00^2}{2} + \frac{1}{2}(98.27 - 69.04) * 2.30 * \frac{2}{3} * 1.00 -$$

$$\left[0.45*1.00*2.30*24*\frac{1}{2}*1.00-\frac{1}{2}*0.20*0.95*2.30*24*\left(\frac{2}{3}*0.95+0.05\right)\right]$$

M borde columna= 92.96 kN·m

$\phi M_n = 1.5*92.96 = 139.44 kN·m$

Con el criterio antes utilizado de adoptar un espesor de zapata para un refuerzo menor, se obtiene para $\rho = 0.0025$ un "d" de 0.34 m.

Aproximando la altura h a 0.45 m se tiene d = 0.36 m y resulta:

$A_s = 0.002199*2.30*0.36 = 0.001821\ m^2$

La armadura mínima será:

$A_s = 0.0020*2.30*0.45 = 0.002070\ m^2$

∴ Armadura por colocar: 17 ϕ 1/2" c/0.135 en cada dirección.

Cortante

a) Acción en dos direcciones para sección crítica a "d/2" del borde de la columna:

$$\sigma\left(\frac{d}{2}\right) = 31.03+\frac{1.485}{2.30}(98.27-31.03) = 74.44\ kN/m^2$$

Promediando los cortes:

$$V\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{1}{2}(98.27+74.44)*\frac{1}{2}(2.30+0.66)*0.815-\frac{1}{2}(2.30+0.66)*0.815*0.33*24 = 94.62\ kN$$

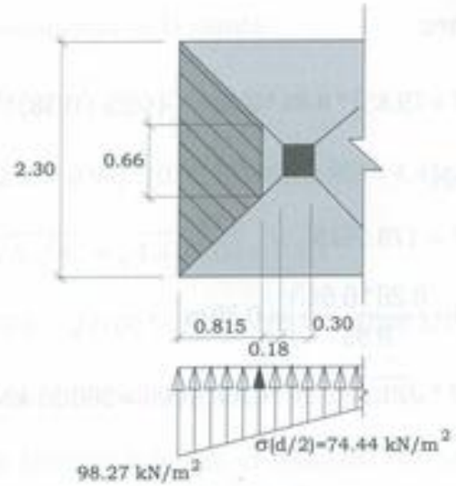


Figura 8.22

$V_u = 1.5*94.62*4 = 567.72 kN$

Para $\beta = 1.0$ $-\ \phi V_c = 0.75*0.33*\sqrt{f'_c}\,b_o d$

$$\phi V_c = 0.75*0.33*\sqrt{21.1}*4*0.66*0.33*1000 = 989.70\ kN$$

Asumiendo que la columna es interior con $\alpha_s = 40$

$$\phi V_c = 0.75*0.083\sqrt{f'_c}\left(\frac{\alpha_s d}{b_o}+2\right)b_o d$$

$$\phi V_c = 0.75*0.083\sqrt{21.1}\left(\frac{40*0.33}{2.52}+2\right)2.52*0.33*1000$$

$$\phi V_c = 1720.30\ kN$$

Por lo tanto $V_u < \phi V_c$

b) Acción como viga para sección crítica a "d" del borde de la columna:

$$\sigma(d) = 31.03+\frac{1.67}{2.30}(98.27-31.03) = 79.85\ kN/m^2$$

Promediando los cortes:

$$V(d) = \frac{1}{2}(98.27 + 79.85) * 0.64 * 2.30 - \frac{1}{2}(0.25 + 0.38) * 0.64 * 2.30 * 24$$

$$V(d) = 119.97 \text{ kN}$$

$$V_u = 1.5 * 119.97 = 179.96 \text{kN}$$

$$d = 0.36 - \left(0.20 - \frac{0.20 * 0.64}{0.95}\right) = 0.29 \text{ m}$$

$$\phi V_c = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 2.30 * 0.29 * 1000 = 390.35 \text{ kN}$$

$$V_u < \phi V_c$$

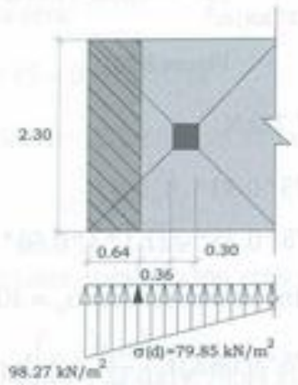


Figura 8.23

Transmisión de los esfuerzos de la columna a la zapata

a) Resistencia al aplastamiento

$$P_u = 450 \text{ kN}$$

Resistencia al aplastamiento en la base de la columna:

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85 f'_c A_1) = 0.65 * (0.85 * 21100 * 0.30 * 0.30) = 1049 \text{ kN} > P_u$$

Resistencia al aplastamiento en la zapata:

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85 f'_c A_1)\sqrt{A_2/A_1} \le 2\phi(0.85 f'_c A_1)$$

$$A_2 = (0.90 + 0.30 + 0.90) * (0.90 + 0.30 + 0.90) = 4.41 \text{m}^2$$

Por lo tanto $\sqrt{A_2/A_1} = \sqrt{4.41/0.09} = 7 > 2$

$$\phi P_{nb} = 0.65 * (0.85 * 21100 * 0.30 * 0.30) * 2 = 2098 \text{ kN} > P_u$$

b) Longitud de desarrollo del refuerzo de la columna:

Para este tema, es también aplicable el resultado obtenido en el problema 8.2.

Cimentación combinada para dos o más columnas

Se denomina cimentación combinada o continua cuando se tiene una zapata para dos o más columnas. Su utilización depende de condiciones tales como la de limitación de espacio, cuando se pretende hacer cimentaciones aisladas para cada columna, o cuando se combinan sus cimentaciones para solucionar la asimetría que representaría la zapata para una columna de lindero. En cualquiera de los casos, se debe lograr que la reacción del terreno se pueda considerar uniforme bajo el cimiento, para lo cual se debe hacer coincidir el centro de gravedad de las cargas de las columnas con el centro de gravedad del cimiento. En el caso de dos columnas, para las condiciones anteriores, se tendrían los siguientes esquemas estructurales:

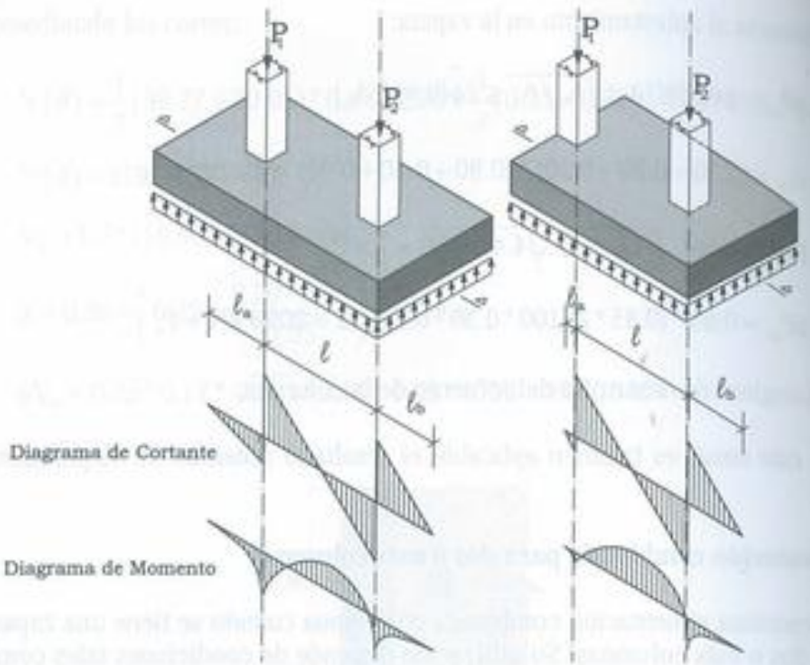


Figura 8.24

A continuación, algunos ejemplos de cimentaciones combinadas.

Problema 8.6

Diseñar una cimentación combinada para una columna exterior o de lindero de 0.35x0.25m, que carga P_1 = 400 kN y una columna interior adyacente de 0.65 x 0.25 m, que carga P_2 = 850 kN, si los ejes de las columnas están separados ℓ = 5.00 m y el terreno tiene una carga de trabajo de 0.1 MPa, empleando concreto de f'_c = 21.1 MPa y refuerzo para f_y = 420MPa en todos los diámetros.

Solución

Se procede a dimensionar en planta haciendo coincidir el centro de gravedad de las cargas de las columnas con el centro de gravedad del cimiento. Luego, se diseña longitudinalmente y posteriormente en sentido transversal, de acuerdo con condiciones que se enunciarán en su oportunidad.

Dimensionamiento en planta.

Centro de gravedad de las cargas de las columnas:

$$850*5.00 = (850 + 400)\cdot x \qquad \therefore \qquad x = 3.40 \text{ m.}$$

Coincidencia del centro de cargas con el centroide del cimiento:

$$\frac{1}{2}L = 3.40 + \frac{0.25}{2} = 3.525 \text{ m.} \qquad \therefore \qquad L = 7.05 \text{ m.}$$

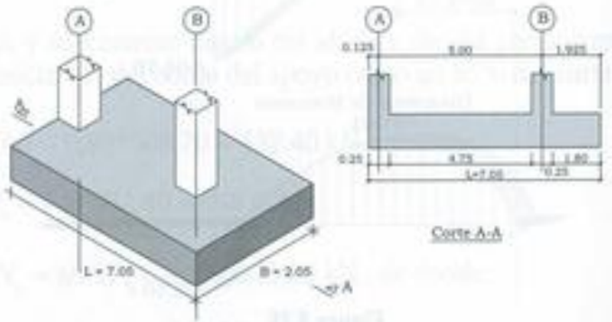


Figura 8.25

Cargas: De columnas: 1250 kN
Peso propio cto (17%): 210 kN

Carga total: ΣP = 1460 kN

$$\text{Area cimentación} = \frac{1460}{100} = 14.6 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{14.6}{7.05} = 2.07 \sim 2.05 \text{ m}$$

$$\sigma neta = \frac{1250}{7.05 * 2.05} = 86.49\ kN/m^2$$

Diseño longitudinal

Carga bajo el cimiento, en kN/m: 86.49*2.05 = 177.30 kN/m

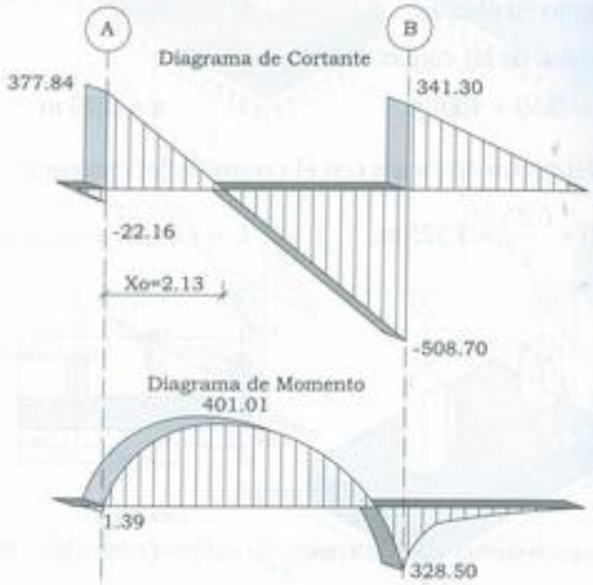


Figura 8.26

Reacciones:

Ai	= – 177.30*0.125	=	–22.16 kN
Ad	= 400 – 22.16	=	377.84 kN
Bi	= 341.30 – 850	=	–508.70 kN
Bd	= 1.925*177.30	=	341.30 kN

$$x_o = \text{punto de anulación corte} = \frac{377.84}{177.30} = 2.13\ m$$

Momentos:

$$M_A = \frac{177.30 * 0.125^2}{2} = 1.39\ kN{\cdot}m$$

$$M_B = \frac{177.30 * 1.925^2}{2} = 328.50\ kN{\cdot}m$$

$$M_{luz} = \frac{377.84 * 2.13}{2} - 1.39 = 401.01\ kN{\cdot}m$$

La altura del cimiento se determina de acuerdo a los siguientes criterios:

1. Que no se requiera refuerzo al corte:

Suponiendo, y únicamente dentro del alcance de una predimensión, el corte Bi a la distancia "d" del borde del apoyo como un 85% del corte al eje:

$$V(d) \sim 0.85*508.70 = 432.40\ kN$$

$$V_u = 1.5*432.40 = 648.60 kN$$

$\phi V_c = \phi 0.17\sqrt{f'_c} b_w d = 648.60$ kN., de donde:

$$d = \frac{648.60}{0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 2.05 * 1000} = 0.54\ m$$

2. Que la armadura por flexión para un momento promedio sea aproximadamente la mínima:

   Utilizando ρ_{min}= 0.0033 para M = 364.76 kN-m y U = 1.5 se obtiene d = 0.47 m.

   Sin embargo, se aproxima a d = 0.56 y h = 0.65 m para tener en cuenta el esfuerzo cortante en el diseño correspondiente.

Armadura longitudinal:

	Ⓐ			Ⓑ
M (kN·m) =	1.39	401.01	328.50	
ϕM_n (kN·m) =	2.01	601.52	492.75	
$A_{s\,min}$ =	$0.0033*2.05*0.56 = 0.003788\ m^2$			
ϕ superior:	10 ϕ 5/8"c/0.20	20 ϕ 5/8"c/0.10	10 ϕ 5/8"c/0.20	
ϕ inferior:	13 ϕ 1/2" c/0.155		20 ϕ 5/8"c/0.10	
V (kN) = 22.16	377.84		508.70	341.30
V(d) (kN) =			387.25	
V_u =			580.88	
ϕV_c =			671.84	
$V_u < \phi V_c$				

Nota: Sólo se colocará armadura constructiva en forma de "U", de acuerdo a la figura 8.29, para sostener la armadura superior en su sitio antes de fundir.

Diseño transversal:

Aunque el diseño longitudinal debería ser suficiente para transmitir la carga de las columnas al cimiento y al terreno, la mayor parte de los autores coinciden en la necesidad de colocar vigas transversales bajo las columnas con el objeto de repartir su carga en el cimiento; uno de los criterios más usados a este respecto considera la repartición de la carga de las columnas a 45° con la vertical, lo cual exige que el ancho de la viga se determine como el de la columna más la altura necesaria del cimiento a cada lado.

A continuación el diseño:

1) Viga bajo columna exterior o de lindero

Ancho de la viga: 0.25 + 0.56 = 0.81 m

$$q_t = \frac{400}{2.05} = 195.12\ kN/m$$

V borde = 195.12*0.85 = 165.85 kN

$V_u = 1.5*165.85 = 248.78 kN$

$\phi V_c = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*0.81*0.56*1000 = 265.46\ kN$

$V_u < \phi V_c$

$$M_{borde} = \frac{195.12*0.85^2}{2} = 70.49\ kN\cdot m.$$

$\therefore\ \phi M_n = 1.5*70.49 = 105.74\ kN\cdot m$

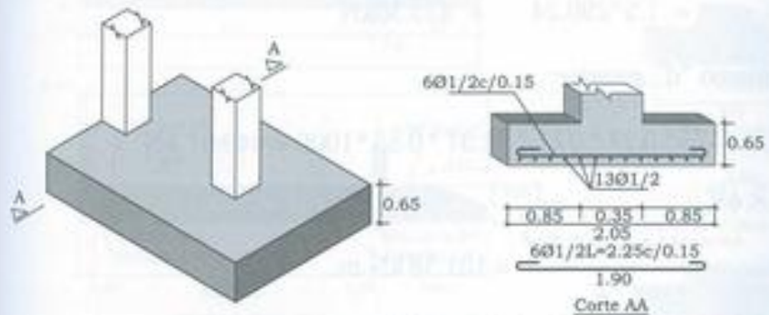


Figura 8.27

Nuevamente, para d = 0.55 m se obtiene como armadura mínima

$\rho = 1.33*0.001159 = 0.001541$

$A_s = 0.001541*0.81*0.55 = 0.000687\ m^2$

Armadura: 6 ϕ 1/2" c/0.15 m.

2) Viga bajo columna interior:

Ancho de la viga = 0.25 + 2*0.56 = 1.37 m

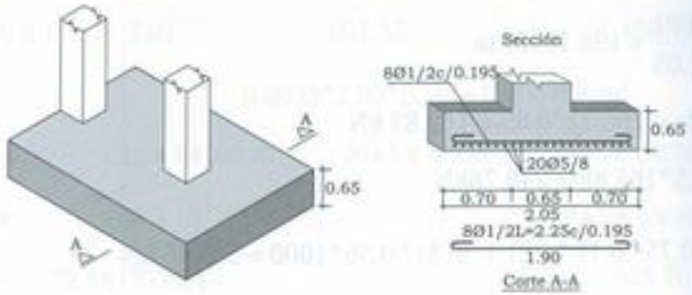


Figura 8.28

$$q_1 = \frac{850}{2.05} = 414.63\,\text{kN/m}$$

V borde = 414.63*0.70 = 290.24 kN

V_u = 1.5*290.24 = 435.36kN

Con el mismo "d" anterior:

$$\phi V_c = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 1.37 * 0.55 * 1000 = 440.97\ \text{kN}$$

$V_u < \phi V_c$

$$M_{\text{borde}} = \frac{414.63 * 0.70^2}{2} = 101.58\,\text{kN·m.}$$

$\therefore \phi M_n = 1.5*101.58 = 152.37\text{kN·m}$

ρ = 1.33*0.00098 = 0.00130

$\therefore A_s$ = 0.00130*1.37*0.55 = 0.000980 m^2

Armadura: 8 ϕ 1/2" c/0.195

Detalle del refuerzo

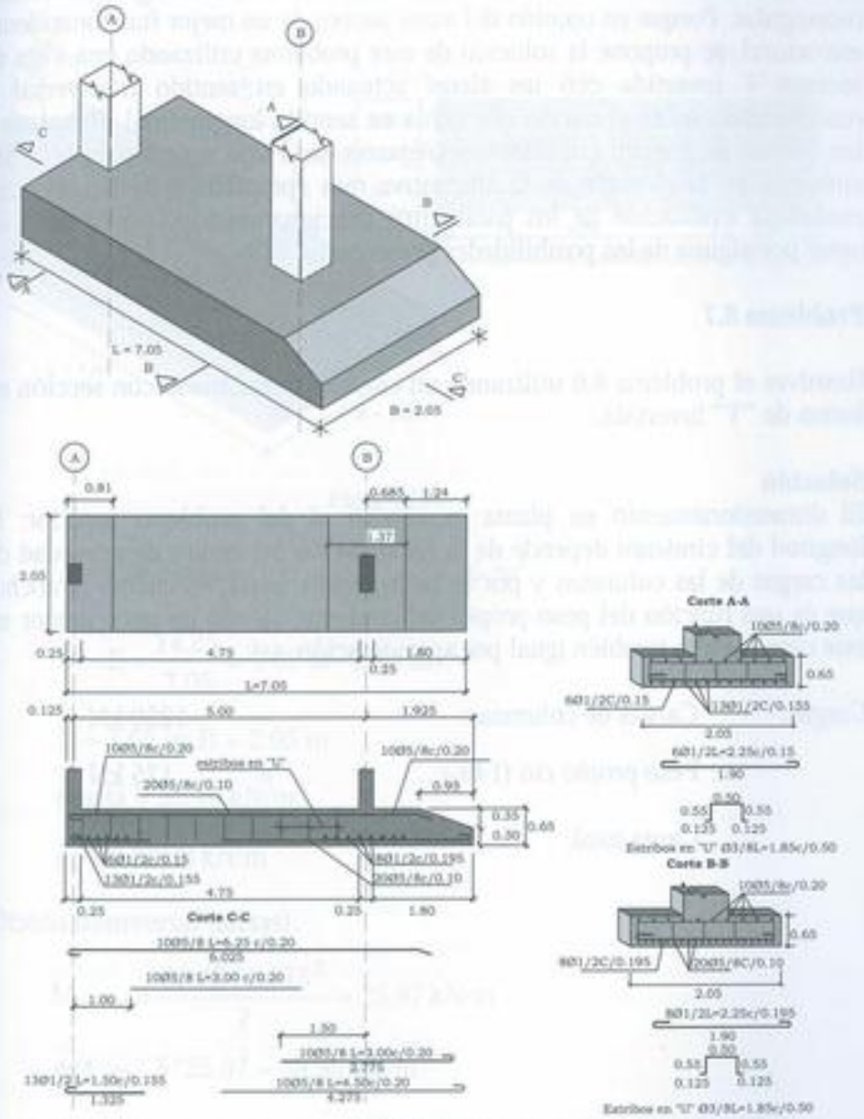


Figura 8.29

En el problema anterior se utilizó el sistema tradicional de viga con sección rectangular. Porque en opinión del autor parece de un mejor funcionamiento estructural, se propone la solución de este problema utilizando una viga de sección T invertida con las aletas actuando en sentido transversal y reaccionando sobre el nervio que actúa en sentido longitudinal. Respecto a los costos, se pueden considerar semejantes para una u otra solución. Sin embargo, en la elección de la alternativa más apropiada debe hacerse una cuidadosa evaluación de los parámetros funcionamiento y costo antes de optar por alguna de las posibilidades presentadas.

Problema 8.7

Resolver el problema 8.6 utilizando un cimiento combinado con sección en forma de "T" invertida.

Solución

El dimensionamiento en planta es similar al del problema anterior; la longitud del cimiento depende de la localización del centro de gravedad de las cargas de las columnas y por lo tanto resulta igual; en cuanto al ancho, que es una función del peso propio del cimiento, siendo un poco menor en este caso, resulta también igual por aproximación, así:

Cargas:	Cargas de columnas:	=	1250 kN
	Peso propio cto (14%):	=	175 kN
	Carga total:		1425 kN

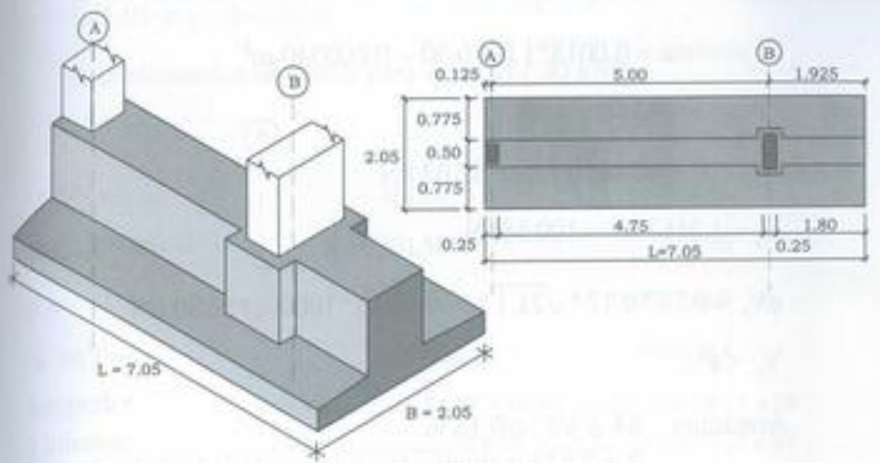


Figura 8.30

$$\text{Area de cimentación} = \frac{1425}{100} = 14.25 \text{ m}^2$$

$$\therefore \ B = \frac{14.25}{7.05} = 2.02 \text{ m} \sim 2.05 \text{ m}$$

L = 7.05 m; B = 2.05 m

σ neta = 86.49 kN/m^2

q_ℓ = 177.30 kN/m

a) Diseño transversal (aletas):

$$M_{\text{borde}} = \frac{86.49 * 0.775^2}{2} = 25.97 \text{ kN·m}$$

$\phi M_n = 1.5 * 25.97 = 38.96$ kN·m

Para este momento y una cuantía cercana a 0.0020 se obtiene: d = 0.23 m. Se adopta h= 0.30 m y por tanto d = 0.21 m.

$\therefore \rho = 0.002408$ y $A_s = 0.002408*1.00*0.21 = 0.000506\ m^2$

A_s mínima $= 0.0018*1.00*0.30 = 0.000540\ m^2$

Refuerzo: $\phi 3/8c/0.13$

V borde $= 86.49*0.775 = 67.03$ kN

$V_u = 1.5*67.03 = 100.55$kN

$\phi V_c = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*1.00*0.21*1000 = 122.90$ kN

$V_u < \phi V_c$

Armadura: 54 ϕ 3/8" c/0.13 m.
2 ϕ 3/8" longitudinales: una a cada lado de la viga.

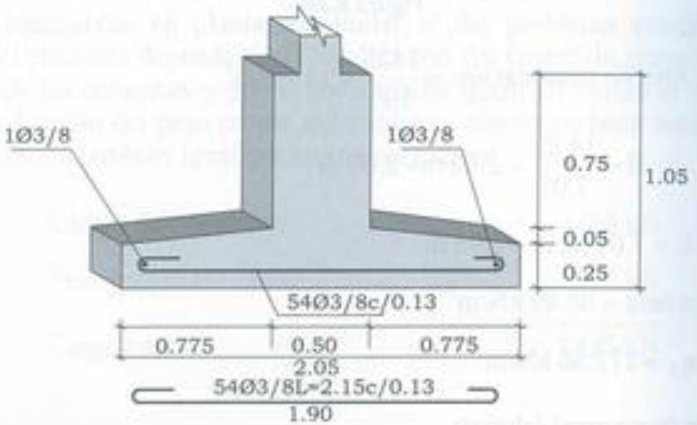


Figura 8.31

b) Diseño longitudinal:

A partir del diagrama de momentos de flexión del problema anterior, y para un momento promedio de 364.76 kN-m y U = 1.5 se determina la altura de la viga de manera que la armadura por flexión sea aproximadamente la mínima:

Con b = 0.50 m y $\rho = 0.0033$ se obtiene d = 0.95 m y se adopta h=1.05 m y d=0.96 m.

A continuación se diseña para $q\ell = 177.30$ kN/m

		Ⓐ		Ⓑ	
M (kN·m) =		401.01		328.50	
ϕM_n (kN·m) =		601.52		492.75	
ρ =		0.003609		0.0033 (mín)	
A_s (m^2) =		0.001732		0.001584	
ϕ superior:		3 ϕ 7/8"	4 ϕ 7/8" + 1 ϕ 3/4"	3 ϕ 7/8"	2 ϕ 7/8"
ϕ inferior:		2 ϕ 7/8"	2 ϕ 7/8"	3 ϕ 7/8"	2 ϕ 3/4"
V (kN) =	22.16	377.84		508.70	341.30
V borde columna =		355.68		486.54	319.14
V_u =		533.52		729.81	478.71
ϕV_c (kN/m^2) =		280.91		280.91	280.91
$V_u - \phi V_c$ =		252.61		448.91	197.80
S (m) =		0.95 + 0.96 =1.91		1.68 + 0.96 = 2.64	0.74 + 0.96 = 1.70
Estribos:		8ε ϕ 1/2" c/0.30		17ε ϕ 1/2" c/0.17	ε ϕ 1/2" c/0.39 – aprox.

Notas:

1. Teniendo en cuenta la indeterminación en su trabajo, para la obtención del número de estribos se prefiere la especificación del Reglamento que exige su colocación hasta una distancia "d" - altura efectiva - más allá del punto donde ya no son teóricamente necesarios y sin variar su separación.

2. Dependiendo de la altura y para h mayor de 900 mm en elementos estructurales sometidos a flexión debe colocarse un refuerzo superficial longitudinal uniformemente distribuido en ambas caras laterales del elemento dentro de una distancia h/2 en la zona de tracción, con el fin de controlar el agrietamiento.

A partir de la expresión:

$$s = 380\left(\frac{280}{f_s}\right) - 2.5c_c \leq 300\left(\frac{280}{f_s}\right)$$ en donde

c_c = es la menor distancia desde la superficie del refuerzo a la cara en tracción: 75 mm

$$f_s = \tfrac{2}{3} f_y = \tfrac{2}{3} * 420 = 280$$

$$s = 380 * \left(\frac{280}{280}\right) - 2.5 * 75 = 192 \text{ mm} < 300 \text{ mm}$$

h/2 = 1.05/2 = 0.525 m Se colocan 3 barras No 3 en cada cara separadas 0.19m medidos centro a centro entre cada barra y la barra a tracción ya existente.

c) Detalle del refuerzo:

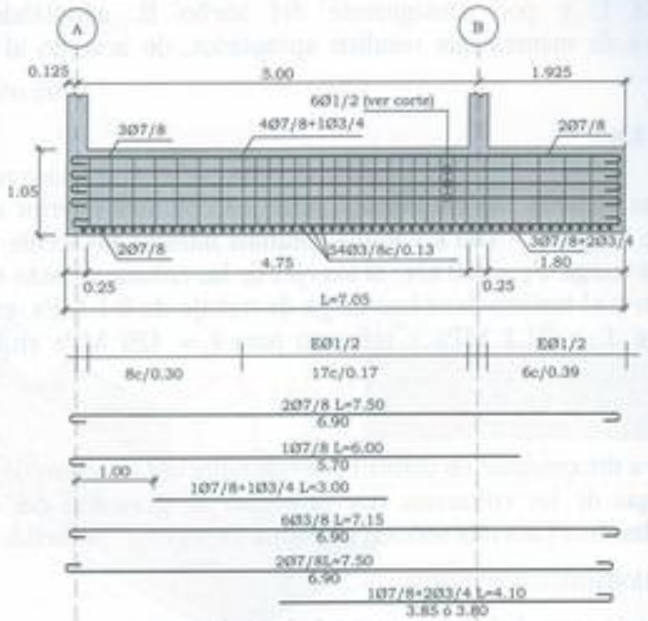


Figura 8.32.a – Refuerzo longitudinal del nervio

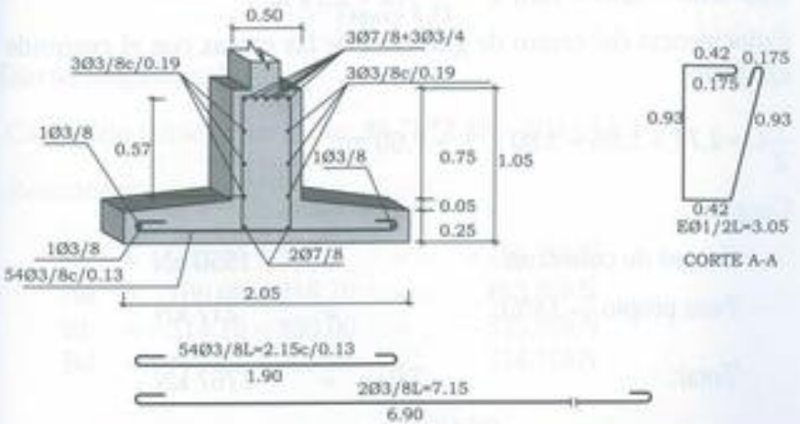


Figura 8.32.b – Sección transversal viga T invertida

En el caso en que ambas columnas son interiores, no existe la limitación de la longitud L y por consiguiente del ancho B, adoptándose estas dimensiones de manera que resulten apropiadas, de acuerdo al siguiente ejemplo.

Problema 8.8

Diseñar una cimentación combinada para una columna interior de 0.50 x 0.25 m que carga P_1 = 700 kN y una columna interior adyacente de 0.65 x 0.25 m que carga P_2 = 850 kN, si los ejes de las columnas están separados ℓ = 5.00 m y el terreno tiene una carga de trabajo de 0.1 MPa, empleando concreto de f'_c = 21.1 MPa y refuerzo para f_y = 420 MPa en todos los diámetros.

Solución

Se procede a dimensionar en planta haciendo coincidir el centro de gravedad de las cargas de las columnas con el centro de gravedad del cimiento. Luego, se diseñará para una sección en forma de viga "T" invertida.

a) Dimensionamiento en planta:

Centro de gravedad de las cargas de las columnas:

$850*5.00 = (850 + 700)\,x \qquad \therefore x = 2.74$ m

Coincidencia del centro de gravedad de las cargas con el centroide del cimiento:

$$\frac{1}{2}L = 2.74 + 1.06 = 3.80 \therefore L = 7.60 \text{ m}$$

Cargas:

Cargas de columnas:		=	1550 kN
Peso propio (~ 14%):		=	217 kN
Total:	ΣP	=	1767 kN

$$\text{Area cimentación} = A = \frac{1767}{100} = 17.67 \text{ m}^2$$

$$\therefore B = \frac{17.67}{7.60} = 2.325 \sim 2.35 \text{ m}$$

Presión neta:

$$\sigma \text{ neta} = \frac{1550}{7.60 * 2.35} = 86.79 \text{ kN/m}^2$$

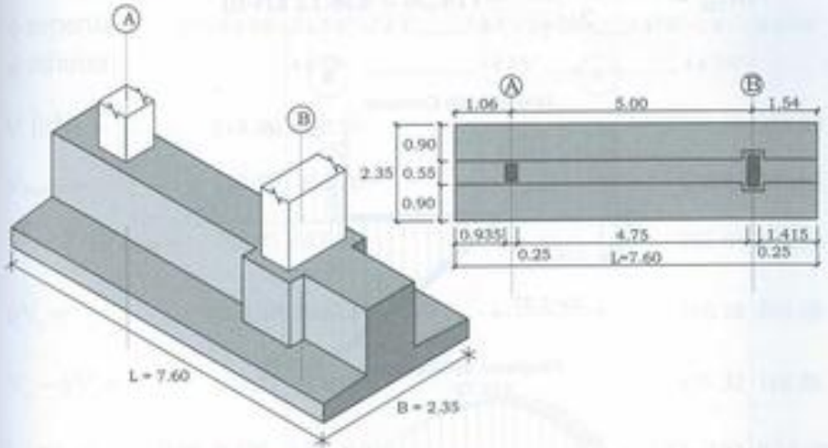


Figura 8.33

b) Diseño longitudinal:

Carga bajo cimiento en kN/m: 86.79*2.35 = 203.96 kN/m

Reacciones:

Ai	=	– 203.96 * 1.06	=	– 216.20kN
Ad	=	700.00 – 216.20	=	483.80kN
Bi	=	314.10 – 850.00	=	– 535.90kN
Bd	=	1.54 * 203.96	=	314.10kN

Punto de anulación del corte: $x_o = \frac{483.80}{203.96} = 2.37$ m

Momentos:

$$M_A = \frac{203.96 * 1.06^2}{2} = 114.58\,kN{\cdot}m$$

$$M_B = \frac{203.96 * 1.54^2}{2} = 241.86\,kN{\cdot}m$$

$$M_{luz} = \frac{483.80 * 2.37}{2} - 114.58 = 458.72\,kN{\cdot}m$$

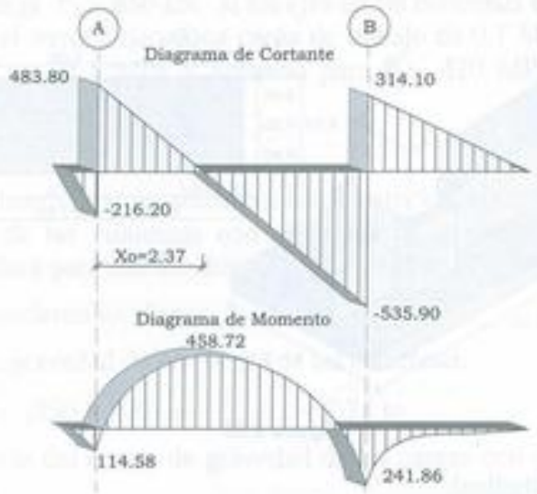


Figura 8.34

A partir del diagrama de momentos, se determina la altura de la viga de manera que la armadura por flexión sea aproximadamente la mínima; para un momento promedio en la luz y el apoyo B de 350.29 kN·m y un ancho de 0.50 m resulta d = 0.93 m.

Se adopta h = 1.00 m y d = 0.91 m.

		A		B	
M (kN·m) =		114.58	458.72	241.86	
$\phi M_n = 1.5M$		171.87	688.08	362.79	
ρ =		0.0033 (mín)	0.004653	0.0033 (mín)	
A_s (m^2) =		0.001502	0.002117	0.001502	
ϕ superior:	2 ϕ 7/8"	2 ϕ 7/8" +2 ϕ 1"	2 ϕ 1" + 3 ϕ 7/8"	2 ϕ 7/8" +2 ϕ 1"	2 ϕ 7/8"
ϕ inferior:		4 ϕ 7/8"	2 ϕ 7/8"	4 ϕ 7/8"	
V (kN) =	216.20	483.80		535.90	314.10
V_{borde} =	190.70	458.30		510.40	288.60
$V_u = 1.5V_{borde}$ =	286.05	687.45		765.60	432.90
ϕV_c =	266.28	266.28		266.28	266.28
$V_u - \phi V_c$ =	19.77	421.17		499.32	166.62
S (m) =	0.06+0.875 = 0.935	1.38+0.91 = 2.29		1.63+0.91 = 2.54	0.54+0.875 = 1.415
Estribos:	ε ϕ 1/2" c/0.46	15ε ϕ 1/2"c/0.17		20ε ϕ 1/2" c/0.145	ε ϕ 1/2"c/0.35 (s/criterio de separación)

Notas:

1. Como en el problema anterior, se prefiere colocar estribos hasta una distancia "d" - altura efectiva - más allá del punto donde ya no son teóricamente necesarios.
2. El refuerzo superficial longitudinal se coloca con el mismo criterio del problema anterior resultando 3 barras No 3 en cada cara separadas 0.19 m medidos centro a centro entre cada barra y la barra a tracción ya existente.

c) Diseño transversal (aletas):

$$M\ borde = \frac{86.79 * 0.925^2}{2} = 37.13\,kN{\cdot}m$$

$\phi M_n = 1.5*37.13 = 55.70 kN\text{-}m.$

Para este momento y una cuantía cercana a 0.0020 se obtiene d = 0.27 m.

Se adopta h = 0.35 m y d = 0.26 m

$\therefore \quad \rho = 0.002241 \quad - \quad A_s = 0.002241*1.00*0.26 = 0.000583\ m^2$

$A_{s\,min} = 0.0018*1.00*0.35 = 0.000630\ m^2$

V borde = 86.79*0.925 = 80.28 kN

$V_u = 1.5*80.28 = 120.42 kN$

$\phi V_c = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 1.00 * 0.26 * 1000 = 152.16\ kN$

$V_u < \phi V_c$

Armadura: 2 ϕ 3/8" longitudinales: una a cada lado de la viga.
69 ϕ 3/8" c/0.11

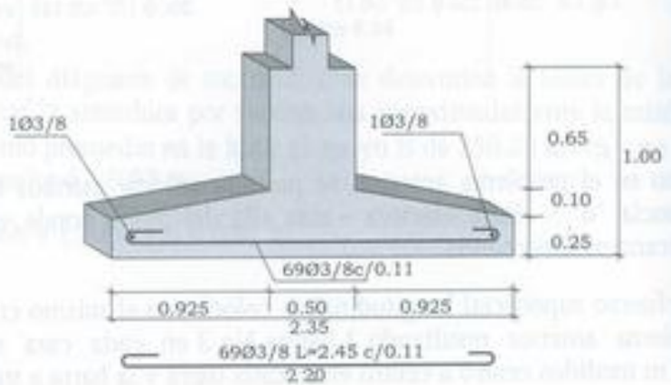


Figura 8.35

d) Detalle del refuerzo:

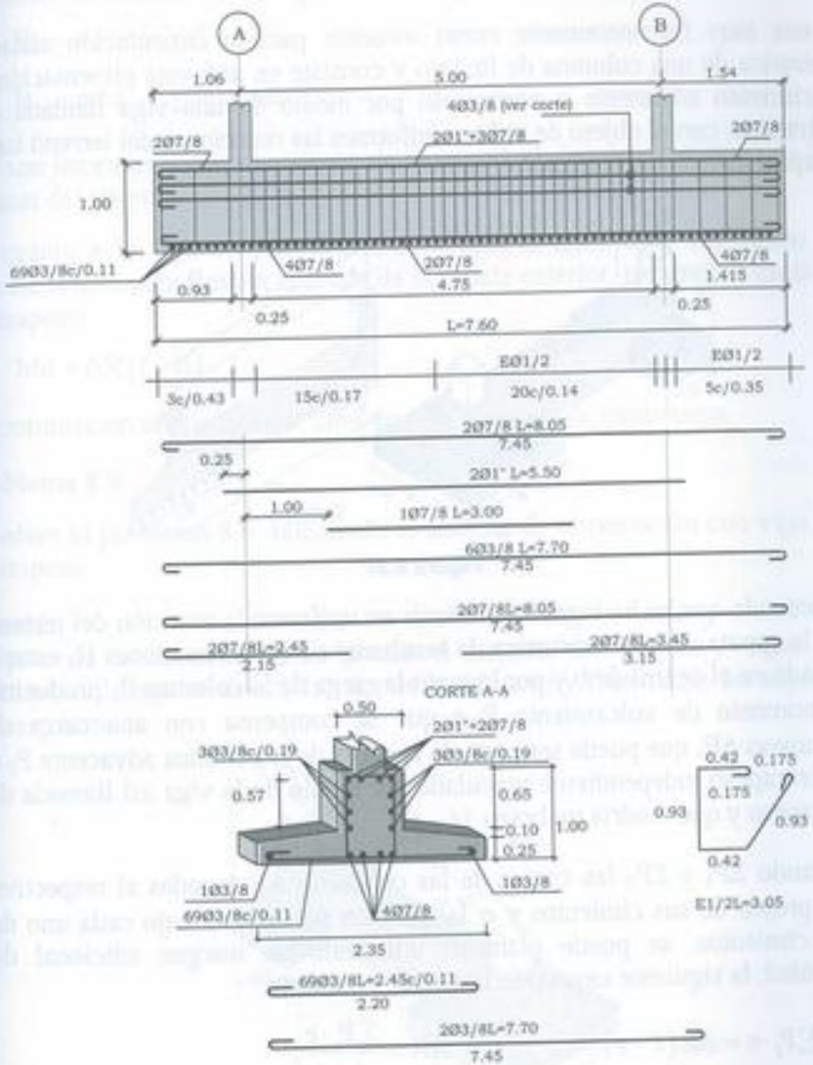


Figura 8.36

Cimentación con viga de contrapeso

Se usa muy frecuentemente como solución para la cimentación aislada excéntrica de una columna de lindero y consiste en unir esta cimentación a un cimiento adyacente o contrapeso por medio de una viga llamada de contrapeso, con el objeto de volver uniformes las reacciones del terreno bajo la zapata aislada excéntrica.

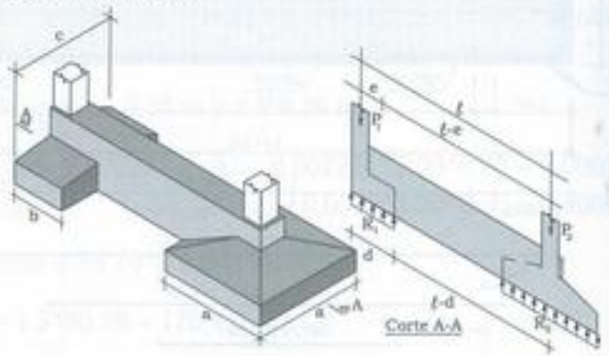


Figura 8.37

Suponiendo que se ha logrado convertir en uniforme la reacción del terreno bajo la zapata aislada excéntrica, la resultante de estas reacciones R_1 estaría aplicada en el centro de b y por lo tanto la carga de la columna P_1 produciría un momento de volcamiento $P_1 \cdot e$ que se compensa con una carga de contrapeso ΔR, que puede ser parte de la carga de la columna adyacente P_2 o un contrapeso independiente vinculado por medio de la viga así llamada de contrapeso y que tendría un brazo $(\ell - e)$.

Llamando ΣP_1 y ΣP_2 las cargas de las columnas adicionadas al respectivo peso propio de sus cimientos y σ la reacción del terreno bajo cada uno de esos cimientos, se puede plantear, utilizando un margen adicional de seguridad, la siguiente expresión básica de equilibrio:

$$\Sigma P_1 \cdot e = \Delta R(\ell - e) \qquad \therefore \qquad \Delta R = \frac{\Sigma P_1 \cdot e}{\ell - e},$$

expresión a partir de la cual se dimensiona el contrapeso necesario para equilibrar el sistema.

También, de acuerdo con la figura anterior:

$$R_1 = \sigma * bc = \Sigma P_1 + \Delta R$$

$$R_2 = \sigma * a^2 = \Sigma P_2 - \Delta R$$

que son las expresiones que sirven de base para el dimensionamiento de las zapatas del sistema.

En cuanto a la viga de contrapeso, se adopta el criterio de considerar la sección crítica para flexión al borde de la zapata exterior, tomándola hacia el contrapeso:

$$Md = \Delta R(\ell - d)$$

A continuación un ejemplo de cimentación con viga de contrapeso.

Problema 8.9

Resolver el problema 8.6, utilizando el sistema de cimentación con viga de contrapeso.

Solución

Se procede a dimensionar en planta el sistema de zapatas y vigas de contrapeso. Luego se diseña la viga de contrapeso y finalmente las zapatas de las columnas.

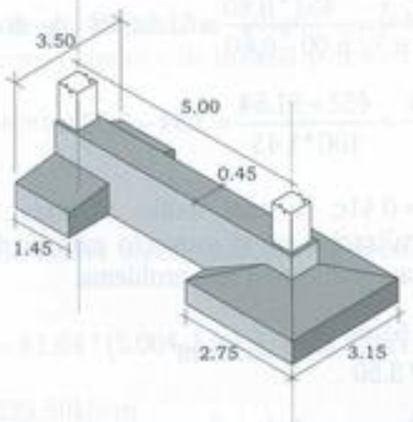


Figura 8.38

Dimensionamiento en planta:

Zapata de la columna exterior o de lindero:

Se adoptan las dimensiones de la zapata para la columna exterior o de lindero de manera que "b" esté aproximadamente entre un 40 y 50% de "c"y debe tenerse en cuenta otras consideraciones propias del proyecto que puedan modificar el requisito anterior.

Cargas:	P_1(de columna)	=	400 kN
	Peso propio zapata (13%)	=	52 kN
	Total: ΣP_1	=	452 kN

Se usa para el peso propio del cimiento un 13%, previendo que esta zapata soportará además el peso del contrapeso, de acuerdo a lo anteriormente visto.

Suponiendo una zapata cuadrada, resulta: lado = 2.13 m

Por tanto, en principio se adopta:

b = 1.45 m, lo cual implica que e = 0.60 m y d = 1.325 m.

$$\therefore \Delta R = \frac{\sum P_i \cdot e}{\ell - e} = \frac{452 * 0.60}{5.00 - 0.60} = 61.64\,kN \quad \text{de donde}$$

$$c = \frac{\sum P_i + \Delta R}{\sigma b} = \frac{452 + 61.64}{100 * 1.45} = 3.54 \sim 3.50\,m$$

Resultando b = 0.41c, lo cual unida a otras consideraciones de Geotecnia y localización en el proyecto para un trabajo de conjunto, puede asumirse aceptable para este problema.

$$\sigma neta_1 = \frac{400 + 61.64}{1.45 * 3.50} = 90.96\,kN/m^2$$

Para el caso de la zapata de la columna interior adyacente:

Cargas:	P_2 (de columna)	=	850 kN
	Peso propio zapata (9%)	=	77 kN
	Total: ΣP_2	=	927 kN

En este caso se usa para el peso propio del cimiento un 9%, previendo que esta zapata resulte aliviada en el peso del contrapeso.

$$\text{Area de cimentación: } A = \frac{\sum P_2 - \Delta R}{\sigma} = \frac{927 - 61.64}{100} = 8.65\ m^2$$

$$\therefore L = \frac{a - a_1}{2} + \sqrt{\frac{(a - a_1)^2}{4} + A} = \frac{0.65 - 0.25}{2} + \sqrt{\frac{(0.65 - 0.25)^2}{4} + 8.65}$$

$$L = 3.15\ m$$

$$L_1 = \frac{A}{L} = \frac{8.65}{3.15} = 2.75\ m.$$

Por tanto, las dimensiones de la zapata en planta serán: 2.75 x 3.15 metros.

$$\therefore \sigma neta_2 = \frac{850 - 61.64}{2.75 * 3.15} = 91.01\,kN/m^2$$

Respecto de la viga de contrapeso, se adopta, en principio, un ancho apropiado para la columna exterior o de lindero de 0.45m.

Diseño viga de contrapeso

Flexión:

Con el criterio de ancho antes enunciado y sección apropiada para diseño a flexión:

$$Md = \Delta R(\ell - d) = 61.64 * (5.00 - 1.325) = 226.53\,kN \cdot m$$

$$\phi M_n = 1.5Md = 339.80\,kN \cdot m$$

Para este momento, y con el criterio de armadura mínima se obtiene d = 0.79 m.

Se adopta h = 0.90 m y d = 0.81 m. – $\rho_{min} = 0.0033$

$\therefore A_s = 0.0033*0.45*0.81 = 0.001203\ m^2$

Armadura: $3\phi\ 3/4" + 2\phi\ 5/8"$

Cortante:

Carga longitudinal bajo la zapata exterior = 90.96*3.50 = 318.36 kN/m

Reacciones:

Ai = 0.125*318.36 = 39.80 kN
Ad = 400 – 39.80 = 360.20 kN

V borde de la columna = 360.20 – 0.125*318.36=320.40 kN

V(d) = 360.20 – 1.325*318.36 = – 61.63 kN~ΔR (61.64 kN)

que se presenta como un valor de revisión del proceso con un resultado correcto

Diseñando los estribos al borde de la columna, resulta:

x_o = punto de anulación del corte $= \frac{360.20}{318.36} = 1.13$ m

$V_u = 320.40*1.50 = 480.60$ kN

$\phi V_c = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*0.45*0.81*1000 = 213.31$ kN

$\phi V_s = 480.60 - 213.31 = 267.29$ kN

$x = \frac{267.29}{480.60}*(1.13-0.125) = 0.56$ m

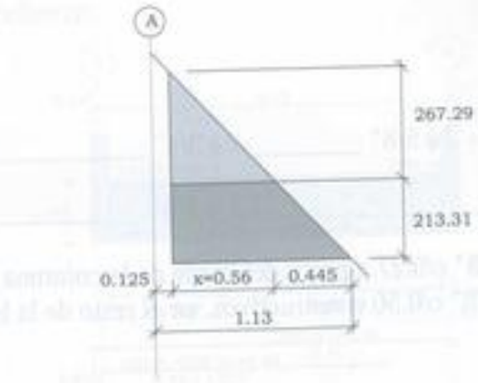


Figura 8.39

Utilizando estribos dobles ϕ 3/8":

$$s = \frac{\phi A_v f_y d}{V_u - \phi V_c}$$

para εεϕ3/8, $s = \frac{0.75*4*0.000071*420000*0.81}{267.29} = 0.27$ m

También en este caso, por la indeterminación que implica el trabajo de la cimentación anteriormente expuesta, para la obtención del número de estribos se prefiere la especificación de su colocación hasta una distancia "d", siendo "d" la altura efectiva, más allá del punto donde ya no son teóricamente necesarios (0.56 + 0.81 = 1.37 m); por tanto se coloca 7 estribos dobles ϕ 3/8" c/0.27 (S = 1.62 m > 1.37 m requeridos).

Dado que se considera de especial importancia para la colocación del refuerzo, se presentan a continuación los diagramas de cortante y momento a que resulta sometida la viga de contrapeso diseñada y luego un detalle de su armadura correspondiente.

Armadura:

	A		B
ϕ Superior:	3ϕ 3/4" + 2ϕ 5/8"	2ϕ 3/4"	2ϕ 3/4"
ϕ Inferior:	3ϕ 3/8"	3 ϕ 3/8"	3ϕ 3/8"
Estribos	7 εε ϕ 3/8" c/0.27 a partir del borde de la columna + εεϕ 3/8" c/0.50 constructivos, en el resto de la longitud.		

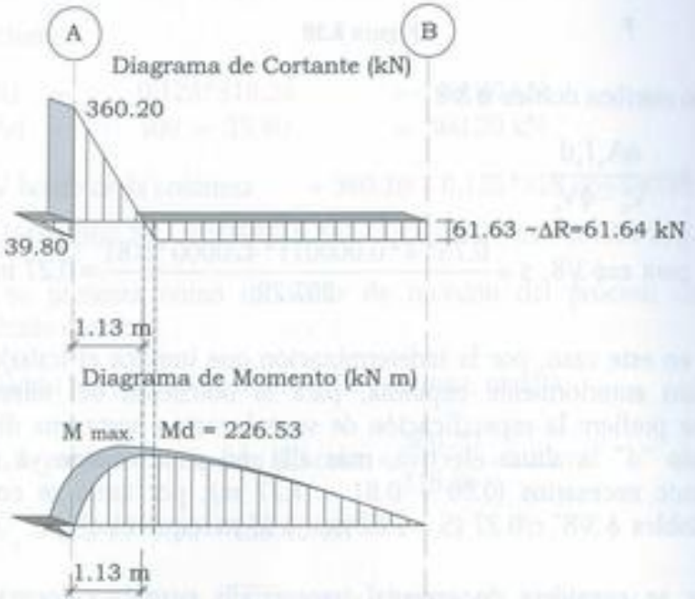


Figura 8.40

Detalle del refuerzo:

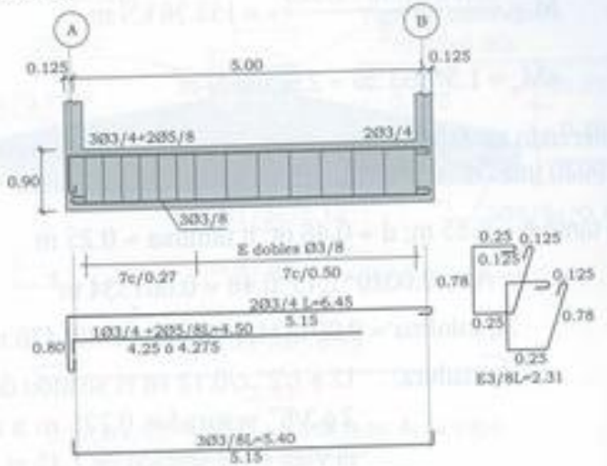


Figura 8.41

Diseño de Zapatas:

Zapata bajo columna exterior: $\sigma neta_1 = 90.96\ kN/m^2$

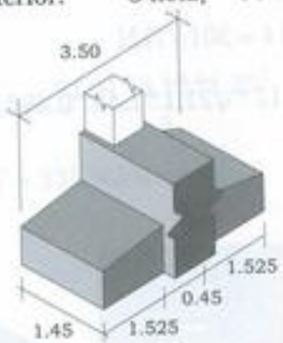


Figura 8.42

Flexión:

Se consideran voladizos en el sentido largo, soportados en la viga de contrapeso:

$$M = \frac{90.96 * 1.45 * 1.525^2}{2} = 153.36\,kN{\cdot}m$$

$$\phi M_n = 1.5 * 153.36 = 230.04 kN{\cdot}m$$

Considerando un espesor apropiado para armadura mínima, resulta para $\rho = 0.0020$ una "d" = 0.46 m.

Por lo tanto h = 0.55 m; d = 0.46 m; h mínima = 0.25 m

$$\therefore A_s = 0.0020 * 1.45 * 0.46 = 0.001334\ m^2$$

$$A_s \text{ mínima} = 0.0018 * 1.45 * 0.55 = 0.001436\ m^2$$

Armadura: 12ϕ 1/2" c/0.12 en el sentido de 3.50 m
2ϕ 3/8" separados 0.725 m a cada lado de la viga en el sentido de 1.45 m.

Cortante:

Revisión al borde de la viga:

V borde viga = 90.96*1.45*1.525 = 201.14 kN

$$V_u = 1.5 * 201.14 = 301.71 kN$$

$$\phi V_c = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * 1.45 * 0.46 * 1000 = 390.35\ kN$$

$$V_u < \phi V_c$$

Detalle del refuerzo:

Figura 8.43

Zapata bajo columna interior:

$$\sigma \text{ neta}_2 = 91.01\ kN/m^2$$

Flexión:

$$M \text{ borde de columna} = \frac{91.01 * 3.15 * 1.25^2}{2} = 223.97\,kN{\cdot}m$$

$$\phi M_n = 1.5 * 223.97 = 335.96 kN{\cdot}m$$

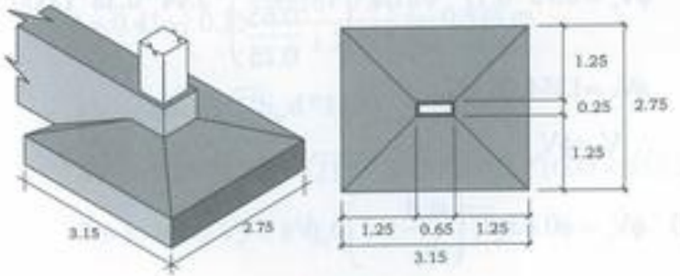


Figura 8.44

Considerando un espesor apropiado para armadura mínima, resulta para $\rho = 0.0020$ una "d" = 0.38 m.

Se adopta h = 0.50 m; d = 0.41 m; h mínima = 0.25 m

$\therefore$ $A_s = 0.001755*3.15*0.41 = 0.002267\ m^2$
A_s mínima $= 0.0018*3.15*0.50 = 0.002835\ m^2$

Armadura: 22 ϕ 1/2" c/0.145 en el sentido de 2.75 m.
19 ϕ 1/2" c/0.145 en el sentido de 3.15 m.

Cortante:

a) Acción en dos direcciones:

$V(d/2) = 91.01*1/2*[(3.15+1.06)*1.045+(2.75+0.66)*1.045]*2$

$V(d/2) = 724.44kN$

$V_u = 1.5*724.44 = 1086.66kN$

$$d = 0.41-\left(0.25-\frac{0.25*1.045}{1.20}\right) = 0.38\,m$$

(a.1) $$\phi V_c = \phi 0.17\sqrt{f'_c}\left(1+\frac{2}{\beta}\right)b_o d$$

$$\phi V_c = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*\left(1+\frac{2}{\frac{0.65}{0.25}}\right)*3.44*0.38*1.000$$

$\phi V_c = 1354.06$ kN

$\therefore$ $V_u < \phi V_c$

(a.2) $$\phi V_c = \phi 0.83\sqrt{f'_c}\left(\frac{\alpha_s d}{b_o}+2\right)b_o d$$

$$\phi V_c = 0.75*0.83*\sqrt{21.1}*\left(\frac{40*0.38}{3.44}+2\right)*3.44*0.38*1000$$

$\phi V_c = 23973.68$ kN

$\therefore$ $V_u < \phi V_c$

(a.3) $\phi V_c = \phi 0.33\sqrt{f'_c}b_o d = 0.75*0.33*\sqrt{21.1}*3.44*0.38*1.000$

$\phi V_c = 1485.24$ kN

$V_u < \phi V_c$

Esta revisión también se puede efectuar a partir de:

$$\frac{\phi V_c}{\phi\sqrt{f'_c}b_o d} = \begin{cases} 0.17*(1+2/\beta) = 0.17*(1+0.77) = 0.30 \\ 0.83(\alpha_s d/b_o+2) = 0.83*6.94 = 5.76 \\ 0.33 \end{cases}$$

$\therefore \phi V_c$ corresponde a $\phi 0.17\sqrt{f'_c}(1+2/\beta)b_o d$

b) Acción como viga:

$V(d) = 91.01*0.84*3.15 = 240.81kN$

$V_u = 1.5*240.81 = 361.22kN$

$$d = 0.41-\left(0.25-\frac{0.25*0.84}{1.20}\right) = 0.335\,m$$

$\phi V_c = \phi 0.17\sqrt{f'_c}b_w d*1000$

$\phi V_c = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*3.15*0.335*1000 = 617.56$ kN

Por lo tanto $V_u < \phi V_c$

Detalle del refuerzo:

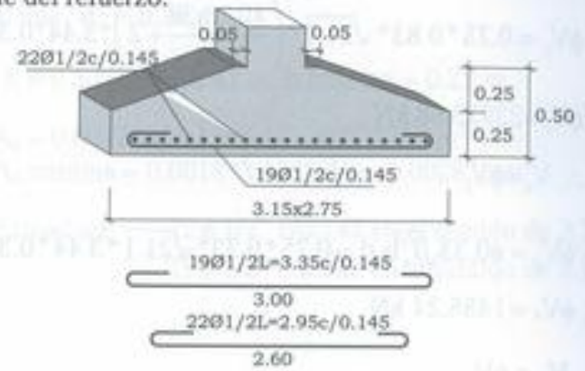


Figura 8.45

Transmisión de los esfuerzos de la columna a la zapata

a) Resistencia al aplastamiento

$P_u = 1275$ kN

Resistencia al aplastamiento en la base de la columna:

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85 f'_c A_1) = 0.65 * (0.85 * 21100 * 0.25 * 0.65) = 1894 \text{ kN} > P_u$$

Resistencia al aplastamiento en la zapata:

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85 f'_c A_1)\sqrt{A_2/A_1} \le 2\phi(0.85 f'_c A_1)$$

$$A_2 = (1.00 + 0.25 + 1.00) * (1.00 + 0.65 + 1.00) = 5.96 \text{m}^2$$

Por lo tanto $\sqrt{A_2/A_1} = \sqrt{5.96/0.1625} = 6.06 > 2$

$$\phi P_{nb} = 0.65 * (0.85 * 21100 * 0.25 * 0.65) * 2 = 3788 \text{ kN} > P_u$$

b) Longitud de desarrollo del refuerzo de la columna:

Suponiendo la columna reforzada con $\phi 5/8"$ de $f_y = 420$ MPa:

$\ell_{db} = 349$ mm < d (adoptado)

Al término de esta breve muestra de Cimentaciones Superficiales o Directas, es preciso agregar que aunque cada caso de cimentación tiene una solución que parece la más apropiada, en su elección y adopción debe procederse siempre de común acuerdo con el Ingeniero de Suelos y Fundaciones, y si en algún caso particular se presentaran dos o más tipos de fundaciones aceptables, la elección final depende en muy buena parte, entre otros factores, de los presupuestos para cada alternativa.

Cimentaciones de profundidad

Como se menciono al comienzo de este capítulo, se denominan de esta manera las cimentaciones que transmiten o disipan su carga en estratos profundos, principalmente por medio de pilotes o cajones de cimentación. Desde el punto de vista estructural, que corresponde al alcance único de este texto, distinguimos dos partes: el diseño del pilote o cajones de cimentación propiamente dicho y el diseño de la llamada cimentación sobre el pilote o cajon de cimentación cuya función es la de transmitir la carga de la columna a los elementos antes mencionados. En este mismo orden se trataran a continuación las cimentaciones sobre pilotes y luego sobre cajon de cimentación.

Cimentación sobre pilotes

Se distinguen dos grandes clases de pilotes, dependiendo de su función y de su fabricación:

I. Por su función	Trabajo de punta Trabajo por fricción Trabajo combinado
II. Por su fabricación	Prefabricados Fundidos en el sitio

Desde el punto de vista estructural, interesa la forma como el pilote transmite o disipa la carga, para determinar los esfuerzos a que estará sometida cualquier sección del mismo y por tanto definir su diseño; también es preciso tener en cuenta la forma como fue fabricado, en la búsqueda de

los esfuerzos causados durante su manejo (izado e hincado) y, desde luego, durante su vida útil.

Para el diseño de los pilotes se procede básicamente a tratarlos como columnas, y su consideración como cortas o esbeltas dependerá del grado de confinamiento que les impartan los estratos atravesados por el pilote; asi mismo, la longitud del refuerzo será una función, entre otras consideraciones, de la disipación de la carga del pilote por fricción con el terreno que lo rodea del grado de homogeneidad del mismo terreno y de la localización del refuerzo transversal que se requiera. Igualmente, la armadura transversal, además de sus propias especificaciones, debe ser apta para las fuerzas de corte definidas por el ingeniero asesor de suelos y fundaciones y cumplir las especificaciones contenidas en el Capítulo C.15 y el Título H del Reglamento. Si adicionalmente se trata de pilotes hincados, es de vital importancia precisar la forma como serán manejados y el tipo de martillo que se utilizará en su hinca, parámetros estos que determinarán la cantidad, localización y detallado del refuerzo correspondiente. Se recomienda a los lectores proveerse del catálogo de los equipos de hincado que en muchos casos resulta de especial importancia para lograr un buen diseño.

En lo relativo a las denominadas cimentaciones sobre pilotes, existen las mismas clases que en las llamadas cimentaciones directas, en donde si a partir de la carga de la columna o muro se busca su coincidencia con el centro de gravedad de las reacciones de los pilotes aplicadas en el centro de los mismos, se tendrán cimentaciones sobre pilotes en vigas para muros, en zapatas aisladas para columnas centrales, cimentaciones combinadas y cimentaciones con viga de contrapeso con las mismas especificaciones y procedimientos de diseño que antes se analizaron en este capítulo, y con la única diferencia que significa no tener carga supuesta uniforme bajo los elementos de cimentación, sino cargas concentradas en las cabezas de los pilotes. A manera de ilustración de lo anteriormente expuesto se presenta un ejemplo de diseño de una cimentación sobre pilotes en zapata aislada para una columna central.

Problema 8.10

Diseñar la cimentación sobre pilotes del tipo de zapata aislada, si se utilizarán pilotes de concreto fundidos en el sitio de 0.60 m de diámetro como solución para una columna de 0.40x0.75 m (20ϕ5/8" para f_y = 240 MPa) que carga 2000 kN, y si de acuerdo con el informe de suelos y recomendaciones de cimentación, los pilotes se localizarán con una separación de una y media veces el diámetro (0.90 m) y su carga de trabajo será de 600 kN por pilote, utilizando concreto de f'_c = 21.1 MPa y acero para f_y = 240 MPa.

Solución

Una vez conocidas las características y cargas de las columnas al nivel de cimentación, se debe proceder a obtener de los contratistas del pilotaje la solución presupuestal más conveniente para el proyecto en diseño; establecida ésta, de común acuerdo con el ingeniero asesor de suelos y fundaciones, se definirán las especificaciones del proyecto, no solamente de los pilotes propiamente dichos, sino de la cimentación sobre los mismos.

1) Diseño del pilote:

Cargas:	De columna:	P	=	2000 kN
	Peso propio cimiento: (7% de P)		=	140 kN
	Total:	ΣP	=	2140 kN

En el análisis de cargas anterior, se ha considerado que el peso propio de la cimentación es soportado por los pilotes. Por tanto:

$$\text{No. de pilotes} = \frac{2140}{600} = 3.57 \sim 4 \text{ pilotes.}$$

Se aclara aquí también que en la carga de trabajo del pilote determinada por el Ingeniero de Suelos y Fundaciones se ha involucrado el denominado factor de eficiencia de grupo. Por tanto:

$$\text{Carga por pilote} = \frac{2140}{4} = 535 \text{ kN}$$

Aceptada la condición de confinamiento del terreno que rodea al pilote y de un eficiente trabajo por fricción que rápidamente disipa la carga, a partir de las normas expuestas en el capítulo 6 de este texto y la especificación que permite la utilización de un área efectiva reducida hasta la mitad del área total cuando la sección transversal es mayor que la requerida por las consideraciones de carga, así como las especificaciones del Capítulo C.15 del Reglamento (Cimentaciones), es posible una solución de diseño como la que se detalla a continuación, para estructuras con capacidad especial (DES) y moderada (DMO) de disipación de energía.

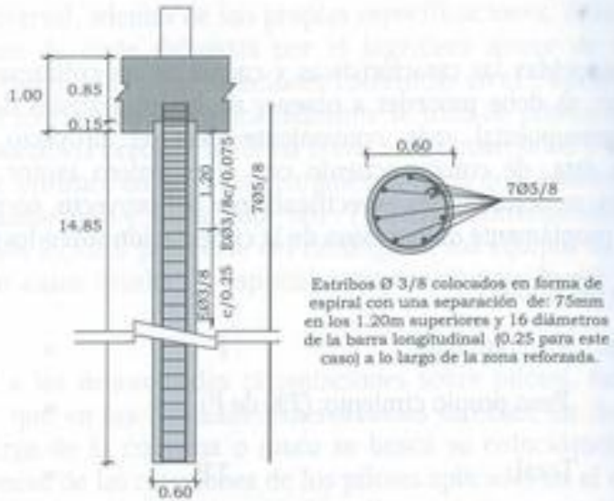


Figura 8.46

Cabe advertir que esta solución de diseño, que corresponde a una de las alternativas más utilizadas en nuestro medio, es sólo posible en aquellos casos en que se verifique el cumplimiento de las premisas expresadas arriba.

2) Diseño de la zapata:

Dimensionamiento en planta:

Es una función del número de pilotes, de su diámetro y su separación y en cierto modo independiente de la forma y tamaño de la columna.

En este caso, para cuatro pilotes resulta:

Flexión:

Se diseña para el sentido más desfavorable:

M borde de la columna = 2*535*0.55 = 588.5 kN·m

$\phi M_n = 1.5*588.5 = 882.75 kN·m$

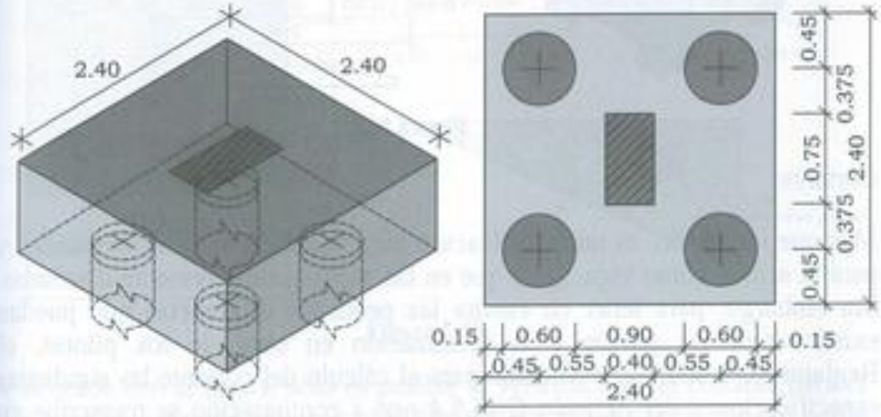


Figura 8.47

Con el mismo criterio ya utilizado de adoptar un espesor de la zapata de manera que el refuerzo a colocar sea aproximadamente el mínimo, se obtiene para $\rho = 0.0025$:

h = 1.00 m y d = 0.84 m.

$\therefore$ $A_s = 0.0025*2.40*0.84 = 0.005040 m^2$

A_s mínima = $0.0020*2.40*1.00 = 0.004800 m^2$

$\therefore$ Armadura: 18 ϕ 3/4" c/0.13 m en cada dirección.

Detalle del refuerzo:

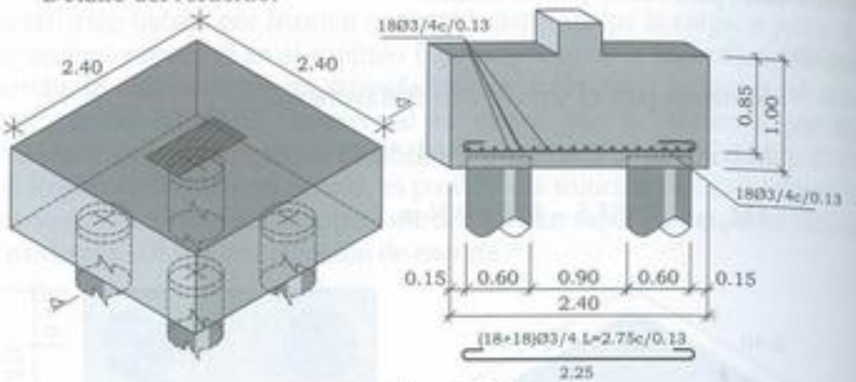


Figura 8.48

Cortante:

Más que un diseño, es una verificación para la acción en dos direcciones y para la acción como viga, igual que en las zapatas anteriormente diseñadas. Sin embargo, para tener en cuenta las pequeñas diferencias que puedan existir entre los planos y la localización en obra de los pilotes, el Reglamento colombiano contiene para el cálculo del cortante las siguientes especificaciones del Artículo C.15.5.4 que a continuación se transcribe en sus apartes correspondientes:

a) Se debe considerar que la reacción total de todo pilote con su centro localizado $d_{pilote}/2$ o más hacia al lado de afuera de la sección produce cortante en dicha sección.

b) Se debe considerar que la reacción de cualquier pilote con su centro localizado $d_{pilote}/2$ o más hacia al lado interior de una sección no produce cortante en dicha sección.

c) Para las posiciones intermedias del centro del pilote, la parte de la reacción del pilote que produce cortante en la sección debe basarse en una interpolación lineal entre el valor total a $d_{pilote}/2$ hacia afuera de la sección y el valor cero correspondiente a $d_{pilote}/2$ hacia adentro de la sección.

En el presente problema, la interpolación con respecto a la sección resistente en cada caso de la verificación, se puede resumir en el esquema que aparece en la figura 8.49, en donde la reacción del pilote que esté $d_{pilote}/2 = 0.30$ m o más dentro de la sección no se tiene en cuenta como productora de cortante en esa sección y la reacción del pilote que está $d_{pilote}/2 = 0.30$ m o más por fuera de la sección se considera en su totalidad como productora de cortante.

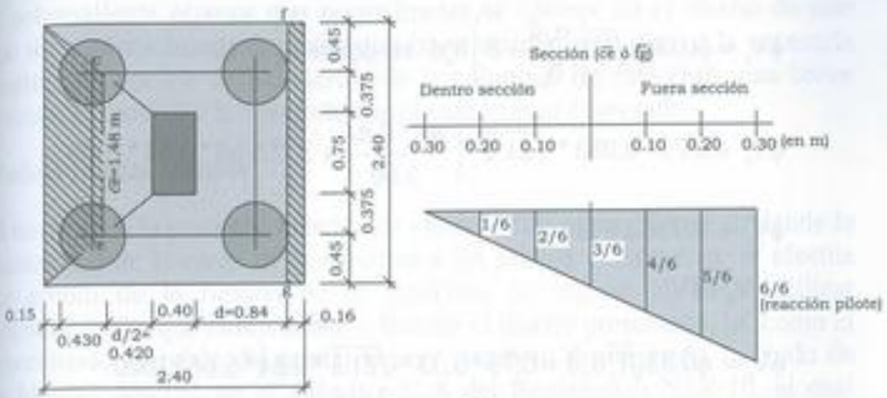


Figura 8.49

De acuerdo con la figura, sólo es posible la verificación del cortante para el denominado comportamiento en dos direcciones a la distancia d/2 del borde de la columna. La interpolación lineal de la reacción de los dos pilotes en cada dirección resultara en:

$$\text{Para la columna en el sentido de } 0.75: \frac{0.43}{0.60} * 535 = 383.42\,\text{kN}$$

$$\text{Para la columna en el sentido de } 0.40: \frac{0.27}{0.60} * 535 = 240.75\,\text{kN}$$

$$V(d/2) = 2*(383.42+240.75) = 1248.34\text{kN}$$

$$V_u = 1.5*1248.34 = 1872.51\text{kN}$$

$$\phi V_c = \phi 0.17\sqrt{f'_c}\left(1+\frac{2}{\beta}\right)b_o d \text{ donde} \beta = \frac{0.75}{0.40} = 1.875$$

$$\phi V_c = 0.75 * 0.17 * \sqrt{21.1} * \left(1 + \frac{2}{1.875}\right) * 5.66 * .84 * 1000$$

$$\phi V_c = 5759.56 \text{ kN}$$

$$\therefore V_u < \phi V_c$$

$$\phi V_c = \phi 0.083 \sqrt{f'_c} \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2\right) b_o d \quad \text{en donde } \alpha_s = 40$$

$$\phi V_c = 0.75 * 0.083 * \sqrt{21.1} * \left(\frac{40 * 0.84}{5.66} + 2\right) * 5.66 * 0.84 * 1000$$

$$\phi V_c = 10786.19 \text{ kN}$$

$$\therefore V_u < \phi V_c$$

$$\phi V_c = \phi 0.33 \sqrt{f'_c} b_o d = 0.75 * 0.33 * \sqrt{21.1} * 0.84 * 5.66 * 1000$$

$$\phi V_c = 5401.12 \text{ kN}$$

$$V_u < \phi V_c$$

Transmisión de los esfuerzos de la columna a la zapata:

a) Resistencia al aplastamiento

$$P_u = 3000 \text{ kN}$$

Resistencia al aplastamiento en la base de la columna:

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85 f'_c A_1) = 0.65 * (0.85 * 21100 * 0.40 * 0.75) = 3497.32 \text{ kN} > P_u$$

Resistencia al aplastamiento de la zapata:

$$\phi P_{nb} = \phi(0.85 f'_c A_1)\sqrt{A_2/A_1} \le 2\phi(0.85 f'_c A_1)$$

$$A_2 = 2.40 * 2.40 = 5.76 m^2$$

Por lo tanto $\sqrt{A_2/A_1} = \sqrt{5.76/0.30} = 4.38 > 2$

$$\phi P_{nb} = 0.65 * (0.85 * 21100 * 0.40 * 0.75) * 2 = 6994.65 \text{ kN} > P_u$$

b) Longitud de desarrollo del refuerzo de la columna:

El sobresaliente espesor que normalmente se obtiene en el diseño de este tipo de cimentaciones, suministra un buen margen en cuanto a la necesaria longitud de anclaje de los hierros de la columna. En este caso, una breve revisión al problema 8.2 permite corroborar lo aquí expresado.

Modelo puntal - tensor

Al termino de la presente solución de cimentación sobre pilotes, en donde la transmisión de la carga de la columna a los pilotes, o viceversa, se efectúa por medio de la flexión en el cimiento, se sugiere al lector utilizar procedimientos que comprueben o limiten el diseño presentado, tal como el denominado "modelo del puntal-tensor", también denominado "método de las bielas", descrito en el apéndice C-A del Reglamento NSR-10, el cual supone que las cargas llega a las cabezas de los pilotes por medio de unos puntales en compresión que se consideran formados dentro de la zapata y que a su vez requieren de unos tirantes o tensores en la base que les impiden abrirse. Para el diseño los puntales son generalmente idealizados como elementos prismáticos en compresión que pueden ser idealizados como de ancho variable. A continuación se presenta una muestra de su funcionamiento como una solución adicional o de comparación para el caso de la zapata de cuatro pilotes en estudio:

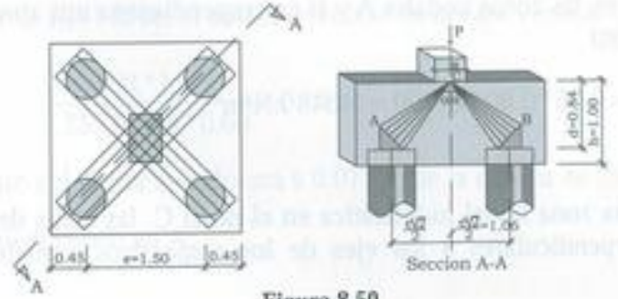


Figura 8.50

Se trata de establecer un modelo de cercha con puntales y tensores conectados en los nodos, capaces de transferir las cargas mayordas a las cabezas de los pilotes. Los nodos coinciden con los ejes de la columna y de los pilotes y están localizados como aparecen en la figura. El modelo está constituido por dos puntales (A-C y B-C) y un tensor (A-B) y tres nodos (A, B y C). Adicionalmente la columna y los pilotes corresponden a las reacciones.

La longitud de los puntales $= \sqrt{0.84^2 + 1.06^2} = 1.35$

La fuerza de tracción en los tensores $= \dfrac{P\left(2e\sqrt{2}\right)}{16d} = \dfrac{2000 * 4.24}{16 * 0.84} = 631$ kN

La fuerza en el puntal $= \dfrac{P}{4} * \dfrac{1.35}{0.84} = 804$ kN

El ángulo entre el puntal y el tensor en el nodo A $= \text{arctg}\left(\dfrac{0.84}{1.06}\right) = 38^{\circ} > 25^{\circ}$ segun el Reglamento.

la resistencia efectiva del concreto (f_{ce}) para el puntal, asumiendo un puntal de sección transversal uniforme a lo largo de su longitud.

$$f_{ce} = 0.85\beta_s f'_c = 0.85 * 1.00 * 21100 = 17935 \text{ kN/m}^2$$

La resistencia efectiva del concreto para la zona nodal C correspondiente a una zona C-C-C, con $\beta_n = 1.0$

$$f_{ce} = 0.85 * 1.00 * 21100 = 17935 \text{ kN/m}^2$$

La resistencia en las zonas nodales A y B correspondiente a una zona C-C-T, con $\beta_n = 0.80$

$$f_{ce} = 0.85 * 0.80 * 21100 = 14348 \text{ kN/m}^2$$

Nodo C

Asumiendo una zona nodal hidrostática en el nodo C, las caras de la zona nodal son perpendiculares a los ejes de los respectivos puntales y los

esfuerzos son iguales en todas las caras. La dimensión minima se obtiene a partir del valor f_{ce}=17935 kN/m^2:

La longitud de la cara horizontal en la zona nodal C corresponde a:

$$\frac{2000 * 1.5}{0.75 * 17935} = \ell^2 \quad \therefore \ \ell = 0.47$$ ~la sección de la columna es de 0.40x0.65 que permite la ubicación de la cara.

La longitud de las otras caras perpendiculares a los puntales se pueden obtener:

$$\frac{804 * 1.5}{0.75 * 17935} = \ell^2 \quad \therefore \ \ell = 0.30$$ que se puede considerar localizada dentro de la zapata

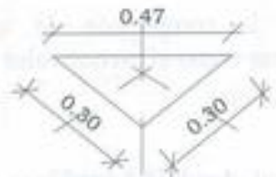


Figura 8.51

El centro de la zona nodal esta cerca de la parte superior de la zapata. La determinación del nudo A confirma su funcionamiento y se desarrolló en este problema con el propósito de explicar al lector su obtención.

Nodo A

A partir de f_{ce}=14348, el tamaño mínimo de la cara vertical de la zona nodal A es:

$$\frac{631 * 1.5}{0.75 * 14348 * 0.60} = 0.15 \text{ m}$$

El centro del tensor se colocara a 0.075 m de la cabeza de los pilotes.

El ancho del nodo en A.

$$\frac{500*1.5}{0.75*14348*0.60} = 0.12 \text{ m}$$

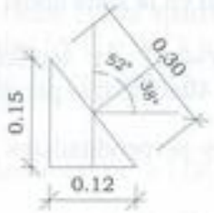


Figura 8.52

Resistencia de los puntales:

La resistencia nominal a la compresión de un puntal sin refuerzo longitudinal; F_{ns}, debe tomarse como el menor valor de:

$$F_{ns} = f_{ce}A_{cs}$$

en los dos extremos del puntal, donde A_{cs} es el área de la sección transversal en un extremo del puntal y f_{ce}, es para este caso, la resistencia efectiva a la compresión en el puntal

$$F_{ns} = 14348*0.60*0.30 = 2583 \text{ kN};$$
$$\phi F_{ns} = 0.75*2583 = 1938 \text{ kN}$$

y se debe cumplir que $\phi F_n \geq F_u$ en donde

$$F_u = 1.5*804 = 1206 \text{ kN}$$

Resistencia de los tensores:

La resistencia nominal de los tensores se calcula

$$F_{nt} = A_{ts}f_y$$

De donde : $A_{s\,req} = \frac{631*1.5}{0.75*240000} = 0.005258 \text{ m}^2$ -- 11 barras N° 8

Para el anclaje de estas barras se debe medir su longitud desde el punto que corresponde al término de la zona nodal extendida como se muestra en la siguiente grafica:

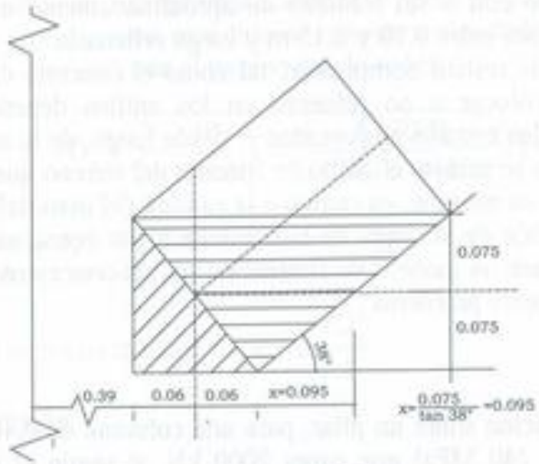


Figura 8.53

Longitud existente para el desarrollo de las barras: 0.095+0.06+0.45-.075=0.53 que es suficiente para el caso de barras corrugadas en tracción que terminan en un gancho estándar.

Cimentación sobre cajones:

A partir de su fabricación, se distinguen dos clases de cajones: los excavados mecánicamente (estabilizados) y aquellos cuya excavación se efectúa de manera manual. Los primeros se comportan, desde el punto de vista de su diseño y funcionamiento estructural, como los pilotes fundidos en sitio que se expuso antes, con la obvia diferencia que implica su gran sección. Respecto de los segundos, aunque básicamente su comportamiento es igual, existen algunas especificaciones de diseño dirigidas primero a su construcción y luego a su trabajo, que se comentarán por considerarlas de interés para el lector.

Adicional a lo anterior, los pilares excavados a mano se justifican en aquellos casos en que los estratos que se deben atravesar impiden su excavación mecánica y su proceso constructivo consiste en excavar tramos de aproximadamente un metro de profundidad, revestir la excavación con anillos de concreto con o sin refuerzo de aproximadamente un metro de longitud y un espesor entre 0.10 y 0.15 m y luego rellenarla con un material estructural capaz de resistir compresión, tal como el concreto ciclópeo. La eventualidad de colocar o no refuerzo en los anillos dependerá de la homogeneidad de los estratos atravesados y, desde luego, de la magnitud de los esfuerzos a que se somete el anillo en función del terreno que lo rodea y la profundidad de los mismos; en cuanto a la calidad del material de relleno, ésta será una función de la carga de la columna y por consiguiente de los esfuerzos que genere. A manera de ilustración de los conceptos anteriores, se resuelve el siguiente problema.

Problema 8.11

Diseñar la cimentación sobre un pilar, para una columna de 0.40 x 0.75 m (20 ϕ 5/8" de f_y = 240 MPa) que carga 2000 kN, si según el informe de suelos y recomendaciones de cimentación el estrato de cimentación está a 15 metros de profundidad con una carga de trabajo de 0.4 MPa, considerando dentro del proyecto la colocación de vigas de amarre en ambas direcciones. Los anillos se construirán en concreto de f'_c = 21.1 MPa y el relleno se hará en concreto ciclópeo conformado por un 60% de triturado y un 40% de concreto de f'_c = 14.1 MPa.

Solución

En primer término se diseña el pilar propiamente dicho y luego la cimentación sobre el mismo.

1) Diseño del pilar:

Diámetro del pilar: $P = f_c \dfrac{\pi D_p^2}{4}$

en donde:

f_c = $0.18 f'_c$ utilizable para concreto ciclópeo;

D_p = diámetro del pilar;

P = carga de la columna. El peso propio del pilar, en este caso se considera soportado por la fricción con el terreno que lo rodea.

$$\therefore D_p = \sqrt{\frac{4P}{\pi * 0.18 f'_c}} = \sqrt{\frac{4 * 2000}{\pi * 0.18 * 14100}} = 1.00 \text{ m}$$

Si se acepta un diámetro neto mínimo, por facilidad constructiva, de 1.20 m y se usan anillos de espesor 0.10 m, resultaría D_p = 1.40 m.

Diámetro de la base: $P = \sigma \dfrac{\pi D_b^2}{4}$

en donde:

σ = Carga de trabajo del terreno.

D_b = Diámetro de la base.

$$\therefore D_b = \sqrt{\frac{4P}{\sigma\pi}} = \sqrt{\frac{4 * 2000}{400\pi}} = 2.52 \sim 2.50 \text{ m.}$$

La transición entre el diámetro de 1.40 m del pilar propiamente dicho y la base de 2.50 m debe hacerse con una pendiente cuyo ángulo con la vertical no sea superior a 30° y rematarse con un segmento vertical cuya altura mínima sea de 0.30 m. Esta transición y el segmento vertical se deben rellenar con concreto de f'_c = 21.1 MPa.

Anillos:

Para el cálculo de los esfuerzos de compresión, los anillos se consideran como un tubo de pared delgada en el cual la presión es una función de la profundidad, del tipo de terreno y de la sobrecarga que a

nivel superficial se considere aplicada sobre el mismo. Estas tres consideraciones se resumen en la expresión:

$$f_c = P_h * \frac{D_p}{2t}$$

donde:

P_h = presión en el anillo a la profundidad considerada;

t = espesor del anillo;

D_p = diámetro del pilar.

En el cálculo de la presión en el anillo, además de la profundidad y de la sobrecarga sobre el terreno que son especificaciones del proyecto, intervienen el peso unitario γ del terreno y la constante de empuje activo k_a que debemos extractar del informe de suelos y recomendaciones de cimentación.

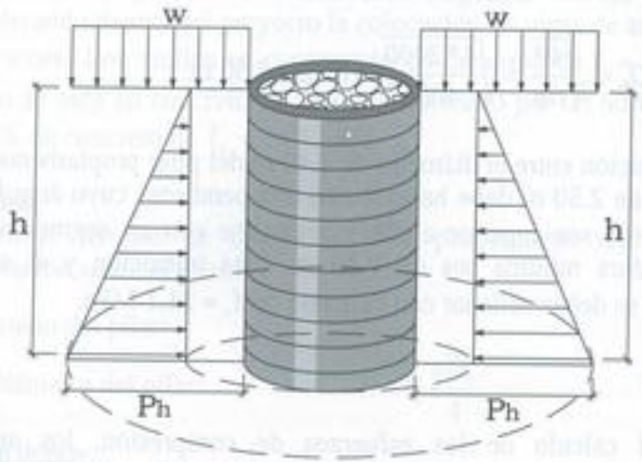


Figura 8.54

$$\therefore \quad P_h = \gamma k_A h + w k_A$$

en donde:

γ = 18 kN/m^3

K_A = 1/3

h = 13.75 m

w = 3 kN/m^2

$$\therefore \quad P_h = 18*1/3*13.75 + 3*1/3 = 83.5 \text{ kN/m}^2$$

Reemplazando en f_c:

$$f_c = \frac{83.5*1.40}{2*0.10} = 584.5 \text{ kN/m}^2 \sim 0.58 \text{ MPa}$$

Por tanto, los anillos se harán en concreto de f'_c = 21.1 MPa, 0.10 m de espesor y en principio sin ningún refuerzo. No obstante, se recomienda considerar la posibilidad del reforzamiento de los anillos en todos los casos para prevenir la posibilidad de un empuje diferente en un anillo con producción de flexión y por tanto de esfuerzos de tracción en el anillo.

2). Cimentación sobre el pilar:

Para este propósito se utilizan uno o dos de los anillos superiores del pilar, rellenándolos con concreto de f'_c = 21.1 MPa y desde luego de acuerdo a determinantes tales como el tamaño de la columna o columnas que se cimientan y la magnitud de la longitud de anclaje necesaria para que los hierros de la columna transmitan su carga al pilar. En el problema se considera suficiente la utilización de un solo anillo por el tamaño de la columna y porque la longitud de desarrollo de las barras en compresión de diámetro ϕ 5/8" de la misma, es más que suficiente. Sólo a manera de repartición de la carga de la columna en el

pilar se recomienda la colocación de una parrilla ϕ 3/8" c/0.15 m en el fondo del anillo utilizado para la cimentación.

Notas:

1. En algunos casos, por consideraciones especiales, como la localización del pilar en la planta de la edificación o la magnitud de los esfuerzos debidos a un sismo, es necesario comprobar el funcionamiento del pilar para estos efectos. En este caso, su comprobación debe efectuarse como una columna de concreto simple para la condición más desfavorable dependiendo de la dirección en que actúa el sismo. En el problema presentado, si se supone localizado en el interior de la construcción y amarrado por vigas en las direcciones, el diseño presentado es demostrable como suficiente.

2. Es importante verificar los esfuerzos de corte especificados por el ingeniero asesor de suelos y fundaciones.

3. Si el diámetro de la base resulta muy superior al del pilar propiamente dicho, se acostumbra adicionar una parrilla de refuerzo en el fondo con el propósito de repartir los esfuerzos de compresión y solucionar las tracciones que podrían inducirse por causa del voladizo allí formado.

Detalle:

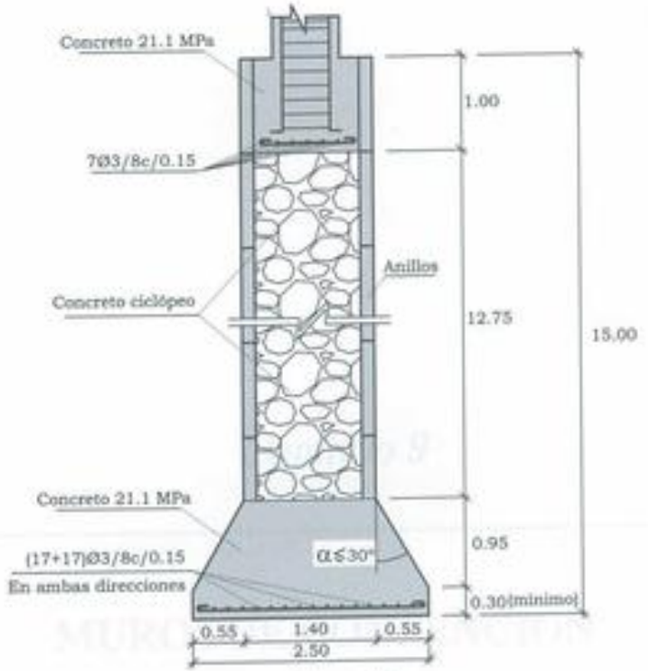


Figura 8.55

Finalmente, en el aspecto de los detalles para la construcción, se debe contar con la asesoría del ingeniero de suelos y fundaciones para la solución de los aspectos que le corresponda. En el cado de un nivel freático superficial se debe proveer a los anillos de los detalles requeridos para su fabricación y utilización.

Capitulo 9

MUROS DE CONTENCION

MUROS DE CONTENCION

Son elementos estructurales diseñados para contener materiales. De uso múltiple en ingeniería, se utilizan en carreteras a media ladera, en edificaciones construidas en terrenos con diferencias de nivel, en soportes de tuberías e instalaciones especiales, etc...

Dependiendo de su funcionamiento y por lo tanto de su perfil, los hay de los siguientes tipos:

a) Muros de gravedad

Como su nombre lo indica son estructuras cuya estabilidad depende de su peso propio. Por lo tanto, son estructuras pesadas, de grandes secciones que exigen la utilización de materiales poco costosos para que sean practicables; esta circunstancia implica que en su diseño se debe garantizar que no haya esfuerzos de tracción en ninguna de sus secciones.

En construcción de edificios, su altura se limita a pequeñas contenciones de alturas no mayores a 3 metros.

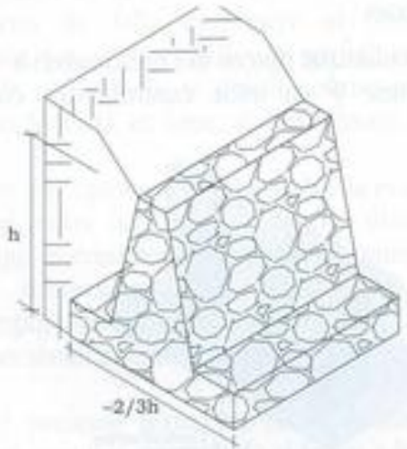


Figura 9.1

b) Muros en voladizo

Son muros cuyo funcionamiento es el de losas en voladizo construidas en concreto reforzado con perfil que puede ser "T" o "L". Reemplaza la estructura pesada del muro de gravedad por una estructura esbelta susceptible de resistir esfuerzos de tracción.

En realidad estos muros están constituidos por dos o tres voladizos, dependiendo de su perfil, y su altura, por razones prácticas, no debe exceder de 6 metros.

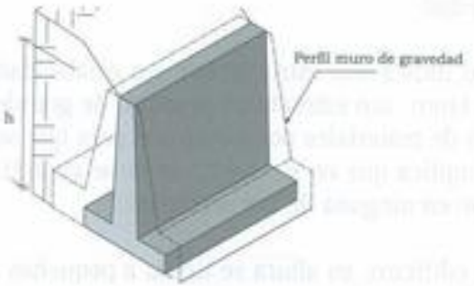


Figura 9.2

c) Muros con contrafuertes

Para grandes alturas, los voladizos típicos del muro anterior se convierten en losas apoyadas en la base y en unos contrafuertes convenientemente espaciados.

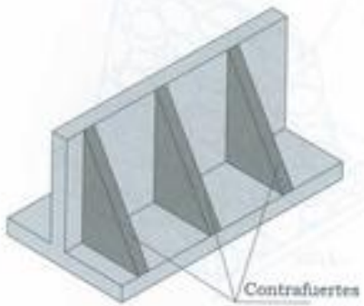


Figura 9.3

Nota:
De acuerdo con el alcance previsto para este texto, sólo se analizarán los muros en voladizo.

Muros en Voladizo

Por lo general, están constituidos por tres voladizos, así:

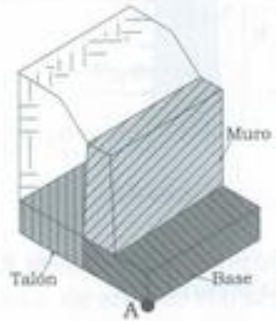


Figura 9.4

Su falla inicial puede ocurrir por volcamiento con respecto al punto A o por deslizamiento a lo largo de su base de sustentación. El estudio de estas dos primeras condiciones de falla constituye el denominado análisis de estabilidad. Una vez que se ha verificado que el muro de contención es estable, se procede al análisis y diseño estructural de cada voladizo individualmente considerado, es decir, al denominado análisis estructural.

En cualquiera de los dos casos, es indispensable la evaluación de las fuerzas que actúan sobre el muro, las cuales se pueden dividir en dos clases: las fuerzas verticales que corresponden al peso del muro, al peso del material contenido, a las sobrecargas, etc. y las fuerzas horizontales que corresponden al empuje del material contenido, de las sobrecargas, de los requisitos del diseño sísmico resistente, etc...

Por el alcance del presente texto, no se explicarán las teorías para la determinación de los empujes, remitiendo al lector a los estudios de suelos y cimentaciones correspondientes y adicionalmente a los textos de mecánica

de suelos que tratan estos temas y también al título H del Reglamento NSR-10; únicamente se aclarará el procedimiento utilizado más adelante en el modelo de diseño del muro para la consideración de estas fuerzas horizontales, así:

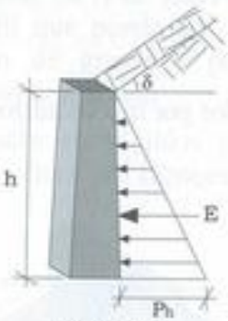


Figura 9.5

El empuje del conglomerado contenido se asimila a un empuje hidrostático; por tanto, para una altura h, la presión vale:

$$p_h = \gamma k_A h$$

en donde:

γ = peso unitario del material contenido;
k_A = factor menor que la unidad que involucra valores de δ y ϕ;
δ = talud;
ϕ = ángulo de fricción interna.

Por tanto:

$$E = \frac{1}{2}\gamma k_A h^2$$

En la mayoría de los casos se presenta una sobrecarga aplicada sobre el material contenido:

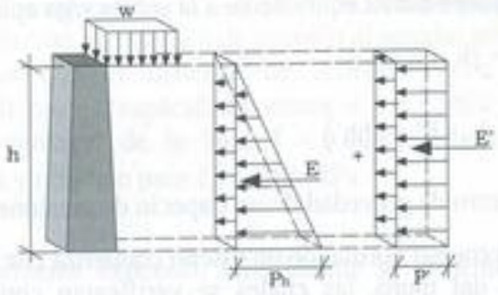


Figura 9.6

En este caso $p' = wk_A$ y por consiguiente:

$$E' = wk_A h$$

Algunos autores asimilan la sobrecarga aplicada sobre el relleno a una sobrealtura del mismo relleno, de acuerdo con la siguiente figura:

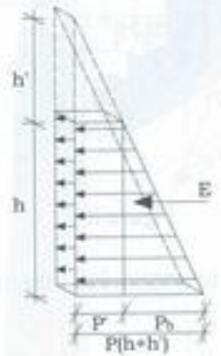


Figura 9.7

Por tanto: $p' = p_{h'} = wk_A = \gamma k_A h'$

de donde:

$$h' = \frac{w}{\gamma}$$

y donde h' es la sobre-altura equivalente a la sobrecarga aplicada.

Luego $p_{(h+h')} = \gamma k_A (h + h')$ y

$$E_t = \frac{1}{2}\gamma k_A \left(h^2 + 2hh'\right)$$

aplicado en el centro de gravedad de un trapecio de presiones.

Sin embargo, el proceso normal de un diseño comienza con la suposición de las dimensiones del muro, las cuales se verificarán con los análisis de estabilidad y estructural; a continuación se transcribe una de las guías usuales para este procedimiento, en el caso en que como el del problema 9.1 sea aplicable, con la necesidad de ajustarla en cada caso particular:

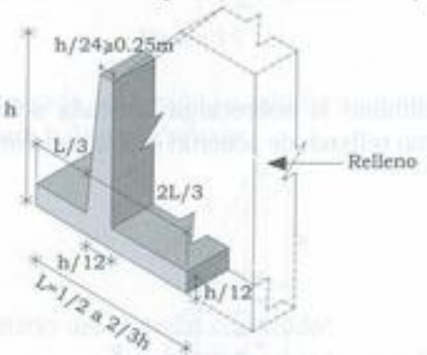


Figura 9.8

A continuación un modelo de un muro de contención en voladizo.

Problema 9.1

Diseñar un muro de contención en voladizo para una altura de 4.50 metros determinada a partir de las cotas arquitectónicas del proyecto y de la necesidad de cimentar el muro sobre un estrato apropiado. El relleno contenido será un material seleccionado susceptible de ser compactado, sometido a una sobrecarga que se estima en un mínimo de 10 kN/m² y de las siguientes características según el estudio de suelos correspondiente: peso unitario γ = 18 kN/m³, ángulo de fricción interna ϕ = 30° y coeficiente de

presión de tierras, estado activo k_A = 0.33 considerando un talud horizontal. El terreno de fundación es, también de acuerdo al estudio arriba citado, de la misma naturaleza que el material de relleno y con las siguientes características adicionales: capacidad portante σ = 0.1 MPa y coeficiente de fricción con el concreto de la base f = 0.50. Se debe utilizar concreto de f'_c = 21.1 MPa y refuerzo para f_y = 240 MPa.

Solución

Según lo anteriormente expuesto, inicialmente se dimensiona el muro y luego se verifica este dimensionamiento a partir de los análisis de estabilidad y estructural.

1) Predimensionamiento

Se utiliza la guía anunciada trabajando con alguna holgura dependiendo de la magnitud de la estructura.

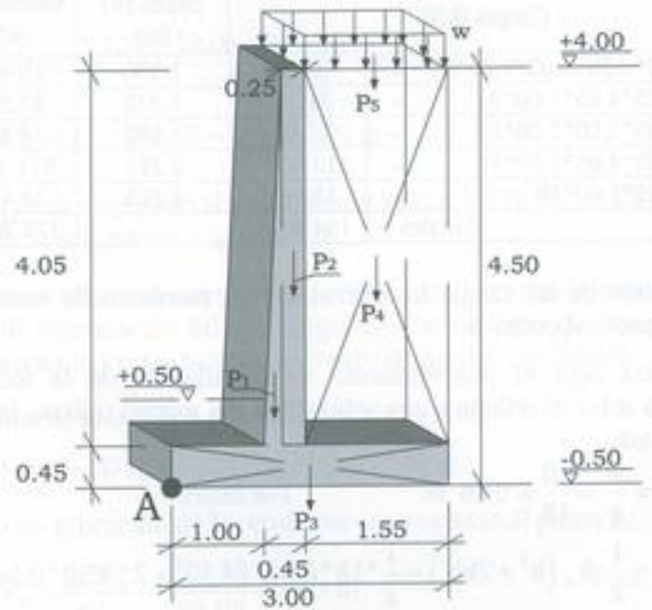


Figura 9.9

Aunque la diferencia de cotas del proyecto que amerita la colocación del muro de contención es de 3.50 metros (+ 0.50 a + 4.00), se supone que la localización del estrato portante obliga a cimentar el muro a un nivel de – 0.50 m para una altura total de 4.50 m. No se tiene en cuenta la carga del relleno sobre la base por su posible carácter de temporal, estando dentro de la seguridad por ser ésta una carga estabilizante.

2) Análisis de estabilidad

Contempla dos aspectos: el del volcamiento con respecto al punto A y el del deslizamiento a lo largo de la base de sustentación

a) Volcamiento

Evaluación de las cargas verticales y su momento contra volcamiento con respecto al punto A:

Cargas (kN)		Brazo (A) (m)	Momento M_A^+ (kN·m)
$P_1 = 1/2*0.20*4.05*1.00*24$ =	9.72	1.130	10.98
$P_2 = 0.25*4.05*1.00*24$ =	24.30	1.325	32.20
$P_3 = 0.45*3.00*1.00*24$ =	32.40	1.500	48.60
$P_4 = 1.55*4.05*1.00*18$ =	113.00	2.225	251.43
$P_5 = 1.55*1.00*10$ =	15.50	2.225	34.49
Totales	194.92		377.70

Evaluación de las cargas horizontales y su momento de volcamiento con respecto al punto A:

Se utiliza aquí el procedimiento de asimilación de la sobrecarga aplicada sobre el relleno a una sobrealtura del mismo relleno, la cual se calcula así:

$$h' = \frac{w}{\gamma} = \frac{10}{18} = 0.56 \text{ m.} \qquad \text{Por tanto:}$$

$$E_t = \frac{1}{2}\gamma k_A\left(h^2 + 2hh'\right) = \frac{1}{2} * 18 * 0.33 * \left(4.50^2 + 2 * 4.50 * 0.56\right)$$

$$E_t = 75.11 \text{kN}$$

El brazo de este empuje corresponde al centroide del trapecio de presiones adjunto:

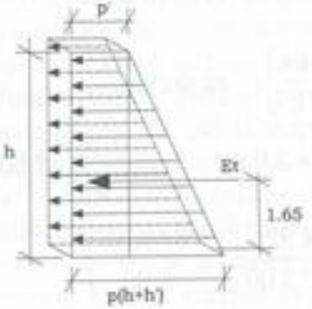


Figura 9.10

En donde:

$$p' = \gamma k_A h' = 18 * 0.33 * 0.56 = 3.33 \text{ kN/m}^2$$

$$p_{(h+h')} = \gamma k_A\left(h + h'\right) = 18 * 0.33 * \left(4.50 + 0.56\right) = 30.06 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Brazo} = \frac{4.50}{3} * \frac{30.06 + 2 * 3.33}{30.06 + 3.33} = 1.65 \text{ m}$$

$$M_A^- = 75.11 * 1.65 = 123.93 \text{ kN·m}$$

El factor de seguridad al volcamiento será: $\alpha = 377.70/123.93 = 3.05$ el cual debe ser mayor o igual a 3.0.

Adicionalmente, el muro puede volcarse si el estrato de soporte bajo la base de sustentación fallara; luego se debe verificar que las reacciones del terreno bajo esta base estén dentro de límites admisibles.

La suma de momentos con respecto a A resulta:

$$\Sigma M_A = 377.70 - 123.93 = 253.77 \text{ kN·m}$$

Punto de aplicación de la resultante con respecto al punto A:

$$x_A = \frac{\Sigma M_A}{\Sigma F_v} = \frac{253.77}{194.92} = 1.30 \text{ m}$$

lo cual significa que la resultante cae dentro del tercio medio de la base. Por tanto, las reacciones del terreno serán:

$$\sigma_{min}^{max} = \frac{\sum F_v}{BL}\left(1 \pm \frac{6e}{L}\right), \quad \text{en donde:}$$

$$B = 1.0\ m; \quad L = 3.0\ m; \quad e = \frac{3.00}{2} - 1.30 = 0.20\ m.$$

$$\therefore \quad \sigma_{min}^{max} = \frac{194.92}{1.00 * 3.00}\left(1 \pm \frac{6 * 0.20}{3.00}\right)$$

$$\sigma_{max} = 90.96\ kN/m^2$$

$$\sigma_{min} = 38.98\ kN/m^2$$

Con una reacción máxima del terreno de 90.96 kN/m² se debe concluir que la base y el talón del muro, que en la verificación del volcamiento parecían un tanto holgados, por este concepto del trabajo del terreno están apenas dentro del límite admisible. Por tanto, este factor de la influencia del terreno es de gran importancia en el criterio de aplicación de la guía de predimensión.

b) Deslizamiento

La verificación por este concepto consiste en obtener el factor de seguridad resultante de la oposición entre la fuerza de fricción en la base de sustentación y la componente horizontal del empuje.

$$F = \text{fuerza de fricción} = f \sum Fv = 0.50 * 194.92 = 97.46\ kN$$

El factor de seguridad al desplazamiento será de $\beta = \frac{97.46}{75.87} = 1.28$

que está por debajo de 2.0 que se considera el mínimo para esta condición.

La solución a este problema está en la construcción de una 'llave' o prolongación del muro propiamente dicho por debajo de la base y el talón. En este caso, el funcionamiento con respecto al deslizamiento será de

fricción entre el concreto y el terreno en la llave y el talón, y de fricción entre el terreno y el terreno antes de la llave, ya que el deslizamiento implica la rotura del suelo. La valoración de lo que denominamos fricción entre el terreno y el terreno con rotura del terreno debe ser consultada con el ingeniero de suelos y fundaciones y para el problema que nos ocupa la hemos considerado como tangente 30° por la correspondiente reacción. Por otra parte, se puede considerar un empuje pasivo del terreno delante de la llave y se puede extender a considerarlo delante de la base siempre que se pueda garantizar, expresamente por el constructor, que el terreno delante de estos elementos no será removido y tampoco será alterado durante la construcción de la estructura. Para el cálculo del empuje pasivo se debe, también, consultar con el ingeniero de suelos y fundaciones sobre las posibles alternativas del diseño (base y llave o solo llave) y la evaluación y adopción del llamado K_P, coeficiente de presión de tierras, estado pasivo. Para el presente caso se supone igual a 3, y de acuerdo con la figura 9.11 se calcula:

$$\sigma_{a-b} = 38.98 + \frac{2.00}{3.00} * (90.96 - 38.98) = 73.63\ kN/m^2$$

$$R_1 = \frac{1}{2}(73.63 + 90.96) * 1.00 * 1.00 = 82.30\ kN$$

$$R_2 = \frac{1}{2}(38.98 + 73.63) * 2.00 * 1.00 = 112.61\ kN$$

$$\Sigma F_v = 194.91\ kN$$

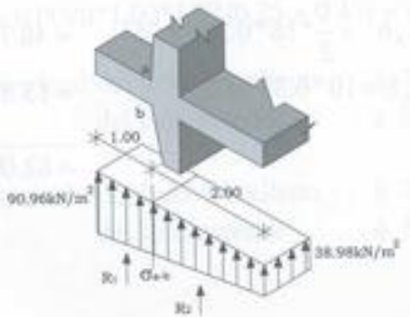


Figura 9.11

$$\therefore \quad \beta = 2.0 = \frac{0.50*112.61 + tg30^\circ*82.30 + \frac{1}{2}*18*3.00*h^2_{(llave+base)}}{75.87}$$

$$\therefore \quad h_{(llave+base)} = 1.33 \text{ m}$$

Para un espesor de la base de 0.45 m y adoptando una profundidad de la llave de 0.90 m, se obtendrá un $\beta > 2.0$ que es lo que se busca. Por su dimensión y cargas, en este ejemplo no es necesaria la revisión de la llave para cortante y flexión. Para otros casos se recomienda al lector tener en cuenta esta posibilidad.

Finalmente se concluye, a partir del estudio de estabilidad, que la predimensión es correcta; en caso contrario se debe ajustar las dimensiones y volver a analizar.

3) Análisis estructural

Se analizan los tres voladizos, el del muro propiamente dicho, el de la base y el del talón, así:

a) Muro

Se evalúan las cargas horizontales como la suma de presiones del conglomerado y de la sobrecarga sobre el mismo.

$$E = \frac{1}{2}\gamma k_A h^2 = \frac{1}{2}*18*0.33*4.05^2 = 48.72 \text{ kN}$$

$$E' = wk_A h = 10*0.33*4.05 = 13.37 \text{ kN}$$

$$\text{E total} = 62.09 \text{ kN}$$

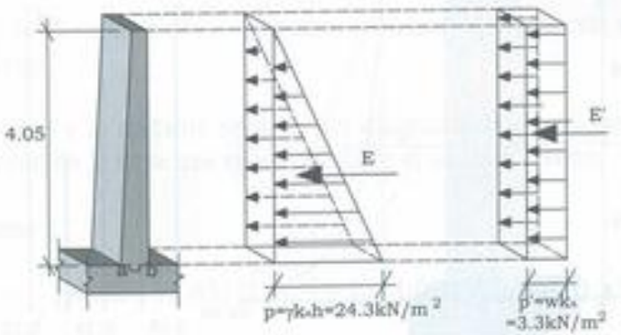


Figura 9.12

Cortante:

$$V_{a\text{-}c} = 62.09 \text{ kN}; \qquad V_u = 1.5*62.09 = 93.14 \text{ kN}$$

$$\phi V_c = \phi 0.17\sqrt{f'_c}bd = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*1.00*0.36*1000 = 210.68 \text{ kN}$$

$$V_u < \phi V_c$$

Flexión:

$$M_{a\text{-}c} = 48.72*\frac{1}{3}*4.05 + 13.37*\frac{1}{2}*4.05 = 92.84 \text{ kN·m}$$

$$\phi M_n = 1.5*92.84 = 139.26 \text{ kN·m}$$

$\rho = 0.005184$; $\quad A_s = 0.001866 \text{ m}^2/\text{m}$

A_s repartición = $0.0020*1.00*1/2*(0.25 + 0.45) = 0.0007 \text{ m}^2/\text{m}$

Armadura longitudinal: del lado del relleno: ϕ 3/4" c/0.15
del lado exterior: ϕ 3/8" c/0.20

Armadura transversal: del lado del relleno: ϕ 3/8" c/0.20
del lado exterior: ϕ 3/8" c/0.20

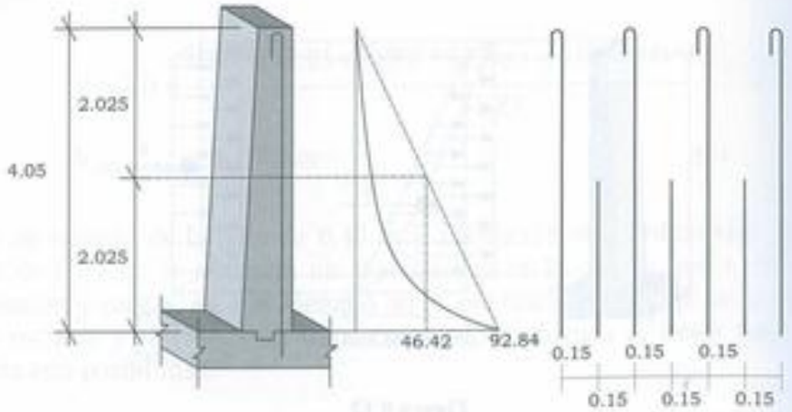


Figura 9.13

En el esquema de colocación del refuerzo, se observa que tratándose de una carga trapezoidal y por lo tanto de un diagrama de momentos en forma de parábola de tercer grado, es posible dividir la altura del muro en dos o tres partes disminuyendo la armadura en uno o dos tercios o a la mitad, según el caso.

b) Voladizo de la base

Estará sometido al siguiente esquema de cargas, estando dentro de la seguridad al no tener en cuenta el peso del relleno sobre la base:

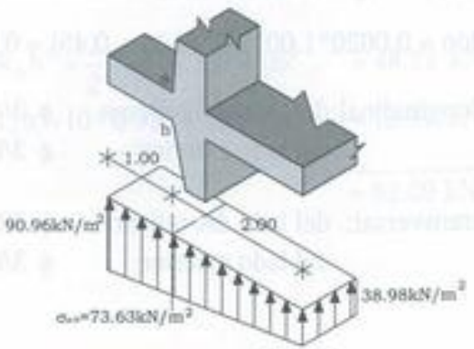


Figura 9.14

Por tanto, la flexión de este voladizo será hacia arriba con armadura de tracción abajo.

Para la flexión y el cortante se resta del diagrama de reacciones del terreno el peso propio de la base que se apoya sobre el mismo terreno.

Cortante:

$$V_{a-b} = \frac{1}{2}(90.96 + 73.63)*1.00 - 0.45*1.00*24 = 71.50 \text{ kN}$$

$$V_u = 1.5*71.50 = 107.25 \text{ kN}$$

$$\phi V_c = \phi 0.17\sqrt{f'_c}bd = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*1.00*0.36*1000 = 210.68 \text{ kN}$$

$$V_u < \phi V_c$$

Flexión:

$$M_{a-b} = 73.63*1.00*\frac{1.00}{2} + \frac{1}{2}(90.96 - 73.63)*1.00*\frac{2}{3}*1.00 - 0.45*1.00*24*\frac{1.00}{2} = 37.20 \text{ kN·m}$$

$$\phi M_n = 1.5*37.20 = 55.80 \text{ kN·m}$$

$\rho = 0.002021$; $A_s = 0.002021*1.00*0.36 = 0.000728 \text{ m}^2/\text{m}$

A_s mínima $= 0.0020*1.00*0.45 = 0.0009 \text{ m}^2/\text{m}$

Armadura: ϕ 3/4" c/0.315 abajo.

Se está dentro de la seguridad si se dobla una de dos barras del refuerzo del muro llevándola en el voladizo.

Respecto de la armadura ortogonal a la anterior, sólo se colocarán unos pasadores constructivos. Véase el detalle del refuerzo.

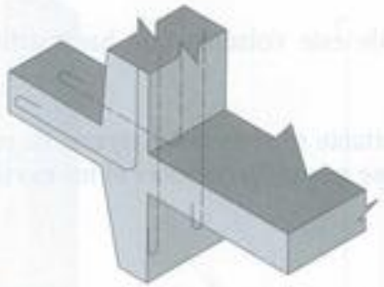
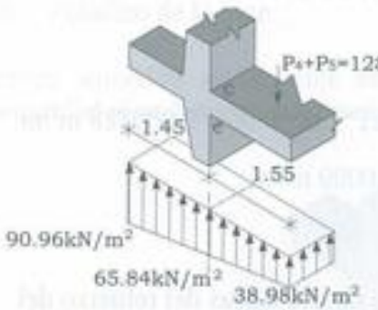


Figura 9.15

c) Voladizo del talón

Estará sometido al siguiente esquema de cargas, predominando muy probablemente las cargas del relleno hacia abajo, por lo que la flexión de este voladizo será hacia abajo, con armadura de tracción arriba.

También para la flexión y el cortante restamos del diagrama de reacciones del terreno el peso propio del talón que se apoya sobre el mismo terreno.



$$\sigma_{c-e} = 38.98 + \frac{(90.96 - 38.98)*1.55}{3.00}$$

$$\sigma_{c-e} = 65.84 \text{kN/m}^2$$

Figura 9.16

Cortante, según figura 9.16:

$$V_{c-e} = 113.00 + 15.50 - \left[\frac{1}{2}(65.84 + 38.98)*1.55 - 0.45*1.55*24\right] = 64.00 \text{ kN}$$

$V_u = 1.5*64.00 = 96.00$ kN

$\phi V_c = \phi 0.17\sqrt{f'_c}bd = 0.75*0.17*\sqrt{21.1}*1.00*0.36*1000 = 210.68$ kN

$V_u < \phi V_c$

Flexión:

$$M_{c-e} = 128.50*\frac{1.55}{2} - \left(\frac{38.98*1.55^2}{2} + \frac{1}{2}(65.84 - 38.98)*1.55 *\frac{1}{3}*1.55 - 0.45*1.55*24*\frac{1.55}{2}\right) = 54.98 \text{ kN·m}$$

$\phi M_n = 1.5*54.98 = 82.47$ kN·m

$\rho = 0.003006$ – $A_s = 0.003006*1.00*0.36 = 0.001082$ m²/m

Armadura: ϕ 5/8" c/0.18 arriba

Como armadura ortogonal a la anterior sólo se colocarán unos pasadores constructivos. Véase el detalle del refuerzo.

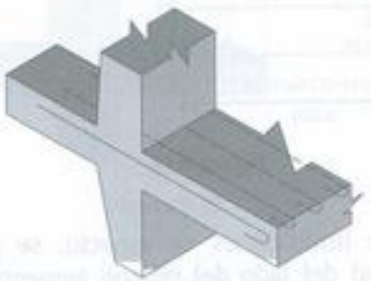


Figura 9.17

4) Detalle del refuerzo

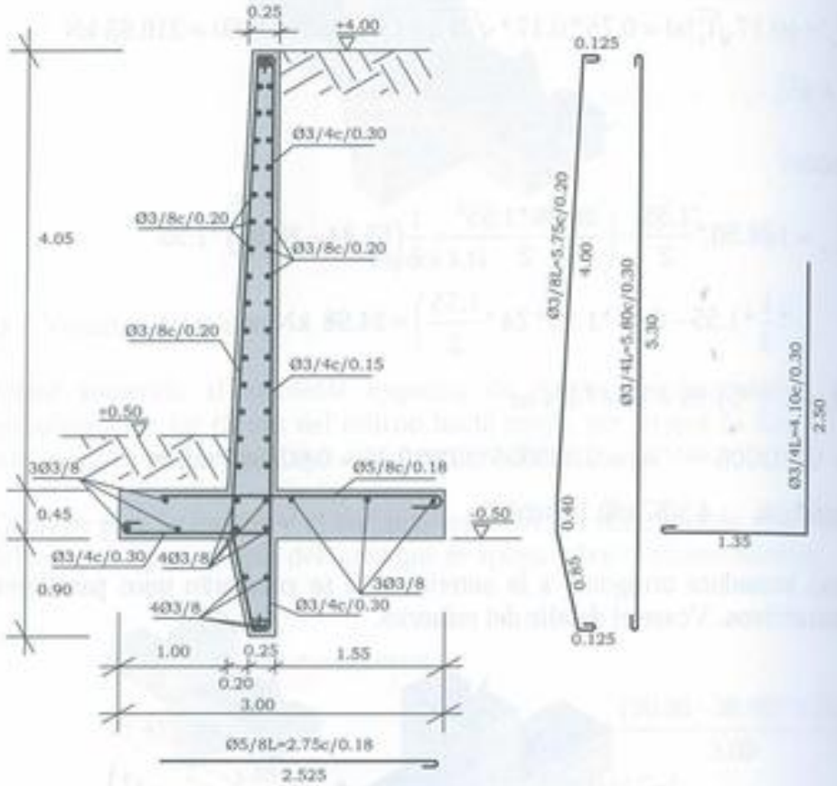


Figura 9.18

Notas

1. En la ausencia de limitaciones de espacio, se puede disminuir el refuerzo longitudinal del lado del relleno aumentando el espesor del muro propiamente dicho; sin embargo, se debe ser prudente en este aumento puesto que conlleva un aumento en el espesor de la base y el talón que con la dimensión actual trabajan correctamente. La guía de predimensión aquí utilizada resulta un poco insuficiente en este aspecto para muros de contención con altura superior a 3.50 m.

2. En ocasiones, la ubicación del muro de contención se presenta de acuerdo a la figura 9.19. En este caso, debe obtenerse la definición del ángulo de transmisión de la sobrecarga en el relleno sobre el cual actúa; si se acepta a 45°, como en el esquema adjunto, su incidencia sobre el muro se presentará a partir de la línea punteada. Los demás parámetros de diseño serán similares al modelo presentado teniendo en cuenta que debe trabajarse para flexión y cortante en el muro propiamente dicho con las componentes horizontales de los empujes debidos al relleno y a la sobrecarga sobre el mismo.

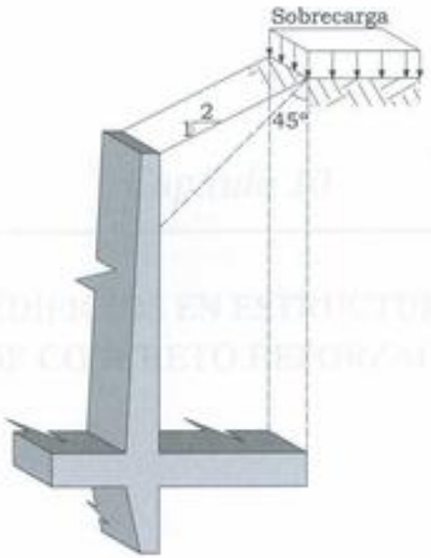


Figura 9.19

Capítulo 10

EDIFICIOS EN ESTRUCTURA DE CONCRETO REFORZADO

Como capítulo final de este primero y breve recorrido por los elementos estructurales de concreto reforzado, se presenta una enumeración de los pasos a seguir en el diseño de las estructuras de este material cuando hacen parte de edificios para uso múltiple, en un todo de acuerdo al Reglamento colombiano NSR-10, sólo para aquellas estructuras en donde los conceptos antes enunciados sean aplicables. Por tanto, no cubre las construcciones a base de muros de carga o mampostería estructural, concreto preesforzado, acero estructural y todas aquellas estructuras cuyos materiales no corresponden a los descritos en el presente texto y que muy seguramente hacen parte de otros cursos desarrollados paralelamente dentro del pénsum de Ingeniería Civil en la Universidad Nacional de Colombia. El autor considera que es suficiente la sola enumeración de los pasos a seguir, en vista de que el presente texto va primordialmente dirigido a los estudiantes de un primer curso de estructuras de concreto reforzado, dentro del cual deben elaborar en su totalidad planos y memorias justificativas completas de un proyecto estructural para un edificio planteado, dirigido en su diseño y revisado por el profesor respectivo y, por consiguiente, con muchas oportunidades para comentar y ampliar los conceptos de la enumeración mencionada.

Procedimiento de diseño de edificaciones nuevas:

1. Predimensión

A partir del anteproyecto arquitectónico y una vez establecida la localización de los ejes estructurales, se escogerá la estructura más apropiada a partir de consideraciones tales como luces, resistencia a cargas verticales y horizontales, calidad de los materiales a emplear, facilidad de su consecución y construcción, influencia del tipo de suelo y clase de cimentación y la presencia de cortes y taludes que influyen en el comportamiento de la estructura que se diseñará. En una otra forma, estos procesos deben ser coordinados con los profesionales de las áreas a que correspondan. Así, por ejemplo, a partir de los ejes estructurales de la figuras anexas, para un edificio que se construirá en la ciudad de Bogotá D.C., y teniendo en cuenta, entre otras cosas, las consideraciones antes enunciadas, es posible establecer las tres distribuciones estructurales

presentadas para el sistema de pórtico, con elementos estructurales predimensionados siguiendo los planteamientos de los capítulos anteriores. Es de advertir que estas tres no son las únicas soluciones y además su escogencia final obedecerá a consideraciones adicionales sobre costos y seguridad, tiempos y facilidades para la construcción, localización y fijación de ductos y tuberías, etc.

2. Solicitaciones

Las solicitaciones verticales y horizontales se pueden evaluar de acuerdo a los siguientes requerimientos:

Cargas muertas según el Capitulo B.3 del Reglamento y sus secciones B.3.2 – Masa y pesos de los materiales, B.3.3 – cargas muertas mínimas; B.3.4 – Elementos no estructurales y B.3.5 – Equipos.

Cargas vivas según el Capitulo B.4 y sus secciones B.4.2 – Cargas vivas uniformemente repartidas, B.4.4 – Impacto, B.4.6 – Puente grúas, B.4.7 – Efectos dinámicos y B.4.8 – Cargas empozamiento de agua y granizo. En el Capitulo B.5 se encuentra lo relacionado con el empuje de tierras y presiones hidrostática y en el Capitulo B.6 las fuerzas de viento.

Adicionalmente se debe determinar las deformaciones causadas por efectos reológicos de los materiales estructurales y los posibles asentamientos del suelo sobre la cual se cimentará la construcción.

En cuanto al diseño sísmico, se considera las siguientes etapas:

a. Obtención de la amenaza sísmica y los valores de A_a y A_v a partir del lugar donde se construirá la edificación de acuerdo a los mapas de zonificación sísmica del Capitulo A.2 del Reglamento. En el Apéndice A-4 se prescribe un listado de municipios con los valores A_a y A_v.

b. Definición de los movimientos sísmicos de diseño de acuerdo a los requisitos del Capitulo A-2 así:

- La amenaza sísmica correspondiente a los parámetros A_a y A_v, o A_d que representan la aceleración horizontal pico efectiva y la velocidad horizontal pico efectiva en función de la aceleración del sismo de diseño.
- Las características de la estratificación del suelo subyacente en el sitio por medio de los coeficientes de sitio F_a y F_v.
- El coeficiente de importancia I y su necesidad de preservar la construcción.

Los movimientos sísmicos de diseño se expresan por medio del espectro elástico de diseño. El Reglamento contiene descripciones alternativas del sismo de diseño y también se pueden obtener de los estudios de microzonificación sísmica. A partir de los movimientos sísmicos de diseño se obtiene las fuerzas sísmicas F_s.

3. Sistemas estructurales, grados de irregularidad de la estructura, procedimiento de análisis y características de los materiales estructurales.

A partir de los grados de regularidad o irregularidad de la configuración de la edificación tanto como en planta como en altura, su grado de redundancia o de ausencia de ella, su altura, las características del suelo de soporte y el nivel de amenaza sísmica se define el sistema estructural de resistencia sísmica de acuerdo a los sistemas contemplados en el Capitulo A.3:

Sistema de muros de carga
Sistema combinado
Sistema de pórtico
Sistema dual.

Los materiales estructurales tales como el concreto estructural, estructura metálica, mampostería estructural o estructura de madera están de alguna forma ligados a los sistemas estructurales apropiados y sus elementos estructurales de acuerdo a la resistencia requerida para los movimientos sísmicos de diseño correspondientes.

4. Análisis sísmico de la estructura y desplazamiento horizontales y derivas

El análisis sísmico de la estructura se realiza aplicando los movimientos sísmicos de diseño a un modelo matemático apropiado de la estructura. Los métodos de análisis a utilizar son, de acuerdo al Capítulo A.3:

Método de la fuerza horizontal equivalente
Método del análisis dinámico elástico
Método del análisis dinámico inelástico
Método del análisis no lineal elástico de plastificación progresiva.

Estos análisis se realizan para los movimientos sísmicos de diseño sin ser divididos por el coeficiente de capacidad de disipación de energía R y deben obtenerse los desplazamientos máximos correspondientes, los efectos torsionales y las derivas, las cuales no deben exceder los limites expresados en el Capitulo A.6.

5. Diseño de los elementos estructurales

El diseño se debe efectuar para la combinación de las diferentes solicitaciones obteniendo las fuerzas internas de diseño de la estructura de acuerdo con los requisitos del Capitulo B.2 del Reglamento. Para tener en cuenta la capacidad de disipación de energía del sistema estructural se reducen los efectos sísmicos, E, dividiendo las fuerzas sísmicas F_s por el coeficiente de capacidad de disipación de energía, R, ($E=F_s/R$). Este coeficiente se determina según la clasificación del sistema de resistencia sísmica del Capitulo A.3, del grado de irregularidad de la edificación, del grado de redundancia o ausencia de ella en el sistema y de los requisitos de diseño y detallado del material para el correspondiente grado de disipación de energía (DMI, DMO o DES). Una vez establecidas las fuerzas internas de diseño, éste se debe efectuar para los valores más desfavorables que se obtengan de las combinaciones mencionadas.

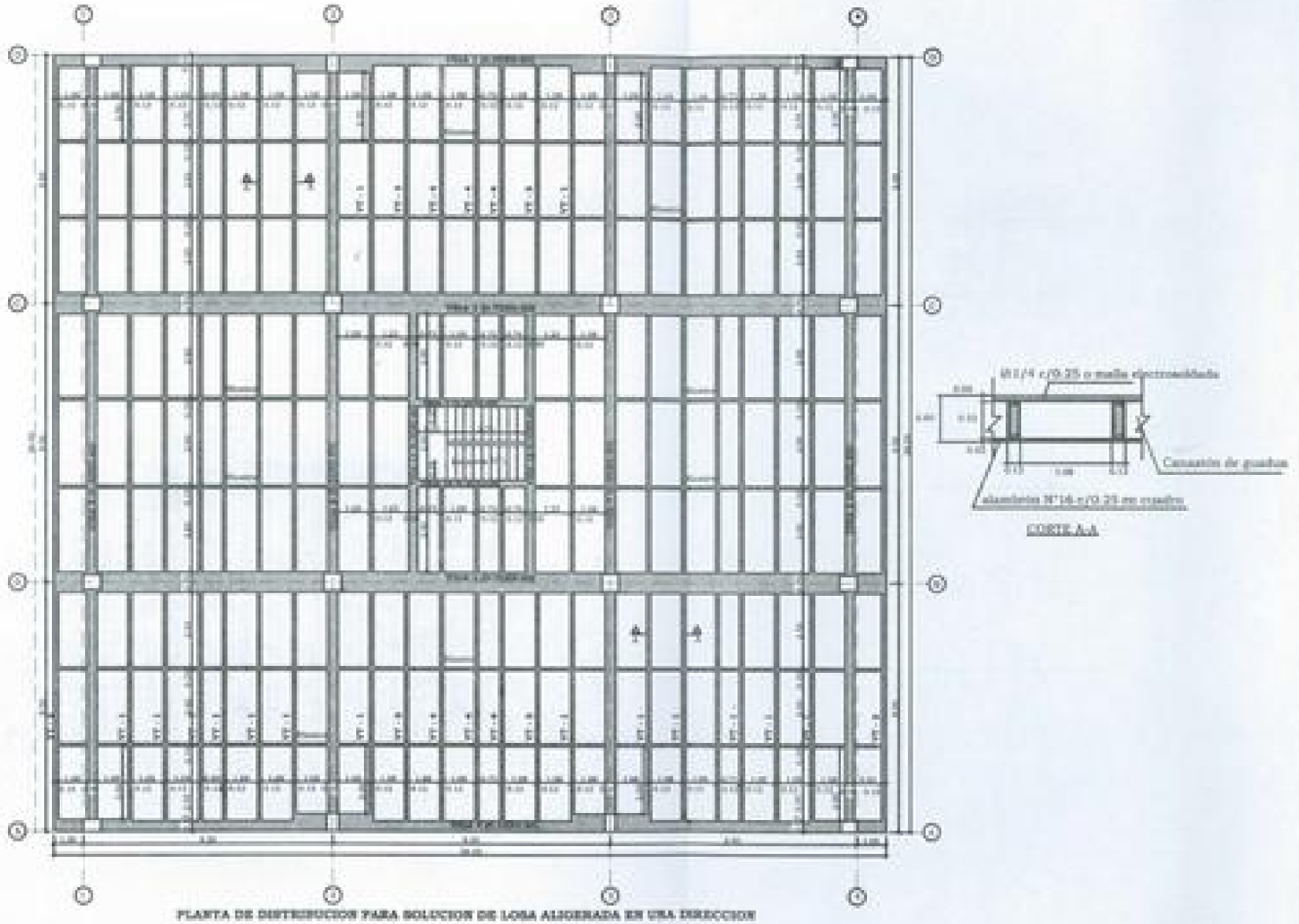
6. Diseño de la cimentación.

El diseño de los elementos estructurales que componen la cimentación se realiza utilizando los resultados de las combinaciones mencionadas en el punto anterior empleando las cargas que corresponda y las fuerzas sísmicas reducidas de diseño, E, de acuerdo a los requisitos propios del material estructural y del título H del Reglamento.

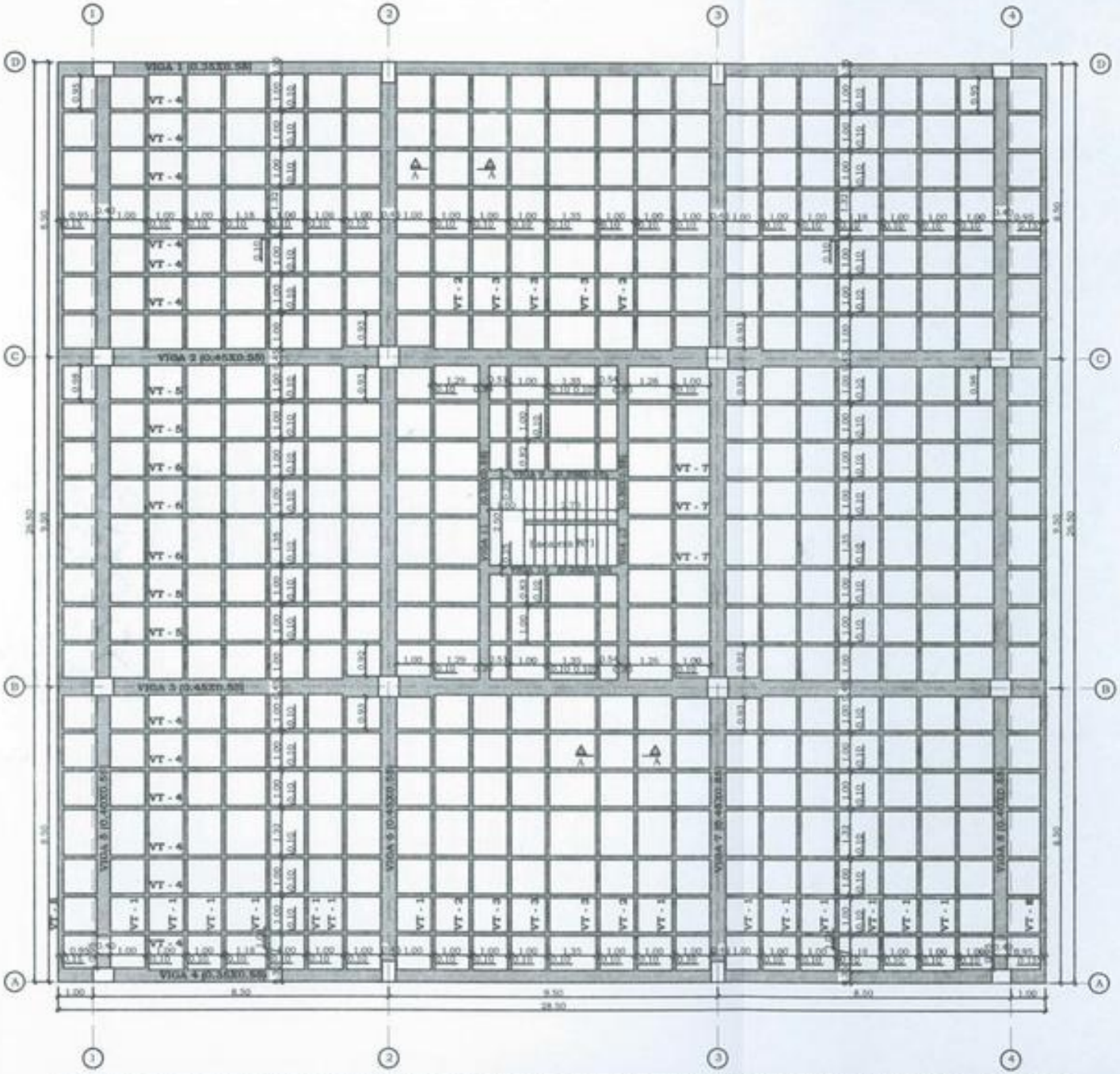
En cuanto a los esfuerzos sobre el suelo de cimentación, se emplean las combinaciones de carga para el método de los esfuerzos de trabajo de la sección B.2.3 y las fuerzas sísmicas reducidas, E. igualmente debe tenerse en cuenta los requisitos del Titulo H.

7. Diseño de los elementos no estructurales

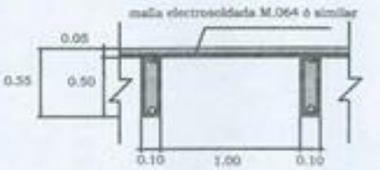
El diseño de los elementos no estructurales debe efectuarse para cumplir el grado de desempeño superior, bueno o bajo en un todo de acuerdo al Capitulo A.9 y según el grupo de uso al cual pertenece la edificación. En cuanto a elementos no estructurales diseñados e instalados por su fabricante o cuya instalación se hace según sus instrucciones, se debe cumplir lo indicado en A.1.5.1.2. El profesional constructor que suscribe la licencia de construcción debe suministrar a la Curaduría las memorias de diseño y los detalles de los elementos no estructurales, suscritos por él mismo, como una garantía de su construcción de acuerdo a lo diseñado.



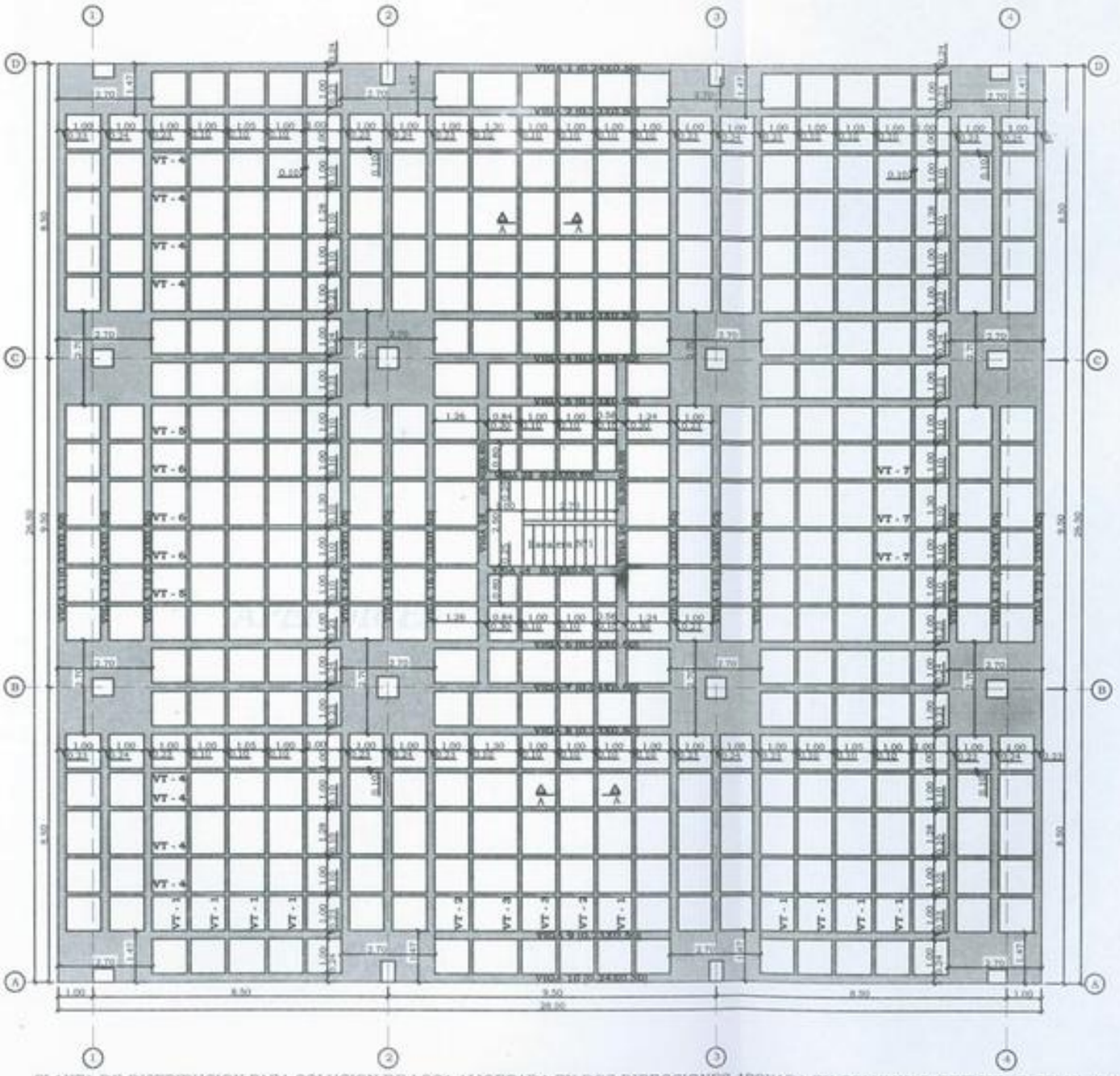
PLANTA DE DISTRIBUCION PARA SOLUCION DE LOSA ALIGERADA EN UNA DIRECCION

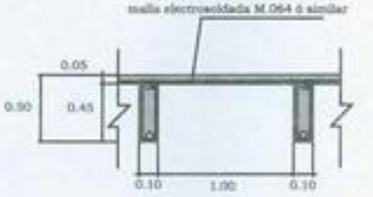


PLANTA DE DISTRIBUCION PARA SOLUCION DE LOSA ALIGERADA EN DOS DIRECCIONES SOPORTADA O APOYADA EN LOS BORDES



CORTE A-A





CORTE A-A

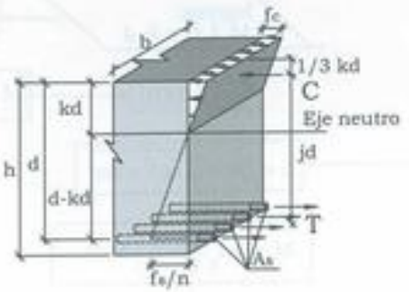
PLANTA DE DISTRIBUCION PARA SOLUCION DE LOSA ALIGERADA EN DOS DIRECCIONES APOYADA EN COLUMNAS (RETICULAR CELULADO)

APENDICES

Apéndice 1.A

METODO ELASTICO

VIGAS RECTANGULARES CON ARMADURA A TRACCION



Esquema

Momento en kN·m.
Dimensiones en m.
Esfuerzos en MPa.
Armadura en m^2.

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \qquad k = -n\rho + \sqrt{(n\rho)^2 + 2n\rho}$$

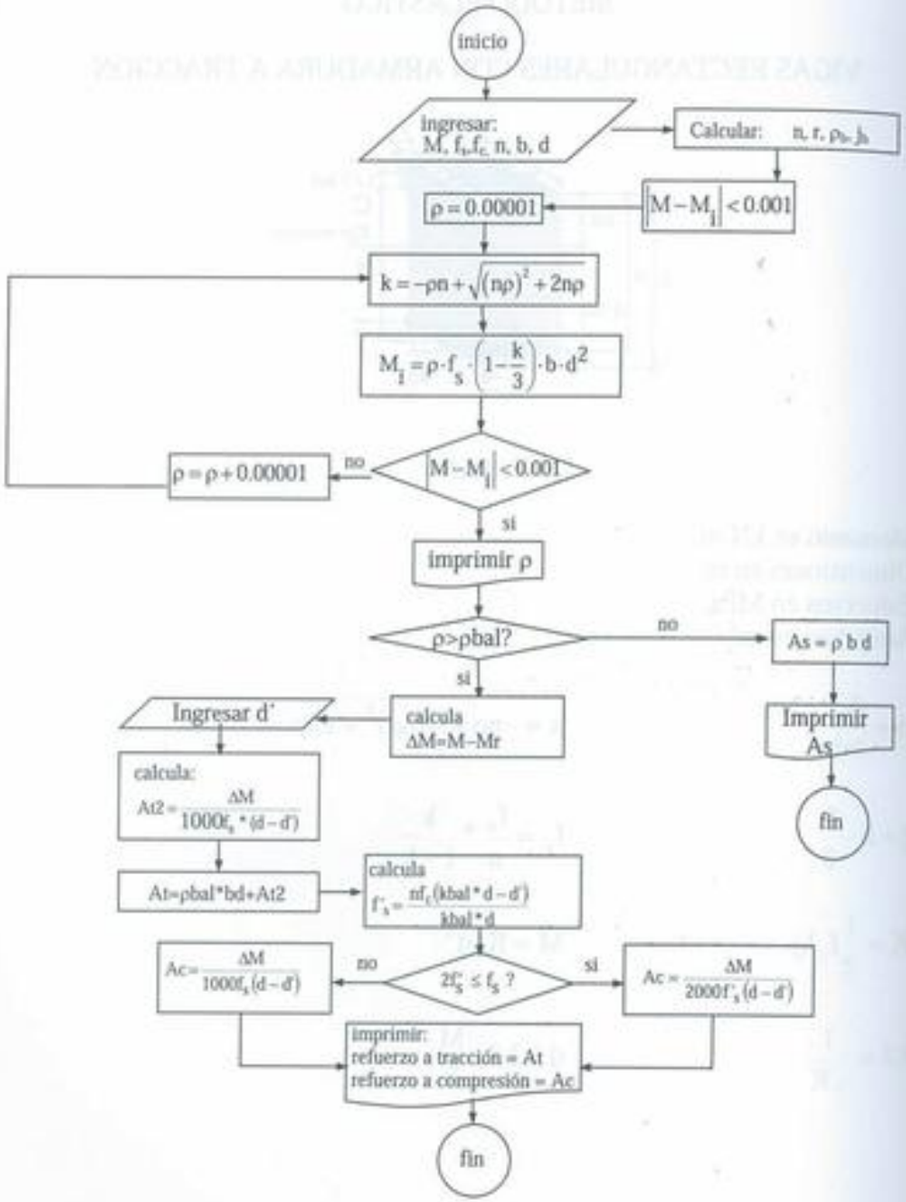
$$j = 1 - \frac{k}{3} \qquad f_c = \frac{f_s}{n} * \frac{k}{1-k}$$

$$K = \frac{1}{2} f_c kj \qquad M = Kbd^2$$

$$k2 = \frac{1}{\sqrt{K}} \qquad d = k2\sqrt{\frac{M}{b}}$$

Diagrama de flujo para el diseño de vigas a la flexión por el método elástico

Calidad de materiales en MPa, dimensiones de la sección en metros y momentos en kN·m



Apéndice 1.B

TABLAS PARA DISEÑO MÉTODO ELÁSTICO VIGAS CON ARMADURA A LA TRACCIÓN

f'_c = 14.1 MPa E_c = 17600 MPa E_s = 200000 Mpa
f_s = 120 MPa n = 11.4
Cuantía balanceada = 0.009828 Cuantía mínima = 0.005833

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1400	0.9533	1.71	114.1		0.0936
0.0020	0.1920	0.9360	2.50	224.6	110.5	0.0667
0.0025	0.2119	0.9294	2.83	278.7	54.1	0.0599
0.0030	0.2296	0.9235	3.14	332.9	54.2	0.0548
0.0040	0.2598	0.9134	3.69	437.8	104.9	0.0478
0.0050	0.2854	0.9049	4.20	542.3	104.5	0.0429
0.005833	0.3042	0.8986	4.60	628.7	86.4	0.0399
0.0060	0.3077	0.8974	4.68	646.1	17.4	0.0393
0.0070	0.3276	0.8908	5.13	748.5	102.4	0.0366
0.0080	0.3455	0.8848	5.56	849.8	101.3	0.0343
0.0090	0.3619	0.8794	5.97	950.0	100.2	0.0324
0.009828	0.3744	0.8752	6.30	1032.2	82.2	0.0311

f'_c = 17.6 MPa E_c = 19700 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 120 MPa n = 10 MPa
Cuantía balanceada = 0.013067 Cuantía mínima = 0.005833

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1318	0.9561	1.82	114.7		0.0934
0.0020	0.1810	0.9397	2.65	225.4	110.7	0.0666
0.0025	0.2000	0.9333	3.00	280.0	54.6	0.0598
0.0030	0.2168	0.9277	3.32	333.9	53.9	0.0547
0.0040	0.2457	0.9181	3.91	441.0	107.1	0.0476
0.0050	0.2702	0.9099	4.44	545.8	104.8	0.0428
0.005833	0.2882	0.9039	4.86	633.0	87.2	0.0397
0.0060	0.2916	0.9028	4.94	650.2	17.2	0.0392
0.0070	0.3107	0.8964	5.41	753.4	103.2	0.0364
0.0080	0.3279	0.8907	5.85	854.3	100.9	0.0342
0.0090	0.3437	0.8854	6.28	955.5	101.2	0.0324
0.0100	0.3583	0.8806	6.70	1057.0	101.5	0.0308
0.0110	0.3718	0.8761	7.10	1156.4	99.4	0.0294
0.0120	0.3844	0.8719	7.49	1255.2	98.8	0.0282
0.0130	0.3962	0.8679	7.87	1353.1	97.9	0.0272
0.013067	0.3970	0.8677	7.90	1360.7	7.6	0.0271

f'_c = 21.1 MPa E_c = 21600 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 120 MPa n = 9.3
Cuantía balanceada = 0.016785 Cuantía mínima = 0.005833

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1274	0.9575	1.88	114.7		0.0934
0.0020	0.1752	0.9416	2.74	226.0	111.3	0.0665
0.0025	0.1936	0.9355	3.10	280.7	54.7	0.0597
0.0030	0.2100	0.9300	3.43	334.9	54.2	0.0546
0.0040	0.2381	0.9206	4.03	441.7	106.8	0.0476
0.0050	0.2620	0.9127	4.58	547.6	105.9	0.0427
0.005833	0.2796	0.9068	5.01	635.1	87.5	0.0397
0.0060	0.2829	0.9057	5.09	652.1	17.0	0.0392
0.0070	0.3016	0.8995	5.57	755.5	103.4	0.0364
0.0080	0.3185	0.8938	6.03	858.3	102.8	0.0341
0.0090	0.3339	0.8887	6.47	959.9	101.6	0.0323
0.0100	0.3482	0.8839	6.89	1060.3	100.4	0.0307
0.0110	0.3615	0.8795	7.31	1162.1	101.8	0.0293
0.0120	0.3738	0.8754	7.70	1259.8	97.7	0.0282
0.0130	0.3855	0.8715	8.09	1359.0	99.2	0.0271
0.0140	0.3964	0.8679	8.47	1457.0	98.0	0.0262
0.0150	0.4068	0.8644	8.85	1556.0	99.0	0.0254
0.0160	0.4167	0.8611	9.22	1654.2	98.2	0.0246
0.016785	0.4240	0.8587	9.50	1729.4	75.2	0.0240

f'_c = 24.6 MPa E_c = 23300 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 120 MPa n = 8.6
Cuantía balanceada = 0.020491 Cuantía mínima = 0.005833

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1228	0.9591	1.95	114.8		0.0933
0.0020	0.1691	0.9436	2.84	226.6	111.8	0.0664
0.0025	0.1870	0.9377	3.21	281.4	54.8	0.0596
0.0030	0.2028	0.9324	3.55	335.6	54.2	0.0546
0.0040	0.2301	0.9233	4.17	443.0	107.4	0.0475
0.0050	0.2534	0.9155	4.74	549.8	106.8	0.0426
0.005833	0.2705	0.9098	5.17	636.2	86.4	0.0396
0.0060	0.2738	0.9087	5.26	654.3	18.1	0.0391
0.0070	0.2920	0.9027	5.75	757.8	103.5	0.0363
0.0080	0.3085	0.8972	6.23	862.2	104.4	0.0341
0.0090	0.3236	0.8921	6.68	964.2	102.0	0.0322
0.0100	0.3376	0.8875	7.11	1065.1	100.9	0.0306
0.0110	0.3505	0.8832	7.53	1165.5	100.4	0.0293
0.0120	0.3627	0.8791	7.94	1265.8	100.3	0.0281
0.0130	0.3741	0.8753	8.34	1365.5	99.7	0.0271
0.0140	0.3849	0.8717	8.73	1464.5	99.0	0.0261
0.0150	0.3951	0.8683	9.11	1562.7	98.2	0.0253
0.0160	0.4047	0.8651	9.49	1661.3	98.6	0.0245
0.0170	0.4140	0.8620	9.86	1759.4	98.1	0.0238
0.0180	0.4227	0.8591	10.22	1855.7	96.3	0.0232
0.0190	0.4312	0.8563	10.58	1953.3	97.6	0.0226
0.0200	0.4392	0.8536	10.93	2048.8	95.5	0.0221
0.020491	0.4431	0.8523	11.10	2096.0	47.2	0.0218

f'_c = 28.1 MPa E_c = 24900 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 120 MPa n = 8.0
Cuantía balanceada = 0.023967 Cuantía mínima = 0.005833

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0020	0.1636	0.9455	2.93	226.6		0.0664
0.0025	0.1810	0.9397	3.32	282.3	55.7	0.0595
0.0030	0.1964	0.9345	3.67	336.8	54.5	0.0545
0.0040	0.2230	0.9257	4.31	444.9	108.1	0.0474
0.0050	0.2457	0.9181	4.89	551.5	106.6	0.0426
0.005833	0.2624	0.9125	5.34	639.3	87.8	0.0396
0.0060	0.2655	0.9115	5.42	655.8	16.5	0.0390
0.0070	0.2833	0.9056	5.93	760.7	104.9	0.0363
0.0080	0.2995	0.9002	6.41	864.1	103.4	0.0340
0.0090	0.3142	0.8953	6.87	966.3	102.2	0.0322
0.0100	0.3279	0.8907	7.32	1068.9	102.6	0.0306
0.0110	0.3407	0.8864	7.75	1170.2	101.3	0.0292
0.0120	0.3526	0.8825	8.17	1271.1	100.9	0.0280
0.0130	0.3638	0.8787	8.58	1371.4	100.3	0.0270
0.0140	0.3744	0.8752	8.98	1471.3	99.9	0.0261
0.0150	0.3844	0.8719	9.37	1570.2	98.9	0.0252
0.0160	0.3939	0.8687	9.75	1668.1	97.9	0.0245
0.0170	0.4030	0.8657	10.13	1767.1	99.0	0.0238
0.0180	0.4116	0.8628	10.49	1862.6	95.5	0.0232
0.0190	0.4199	0.8600	10.86	1960.8	98.2	0.0226
0.0200	0.4279	0.8574	11.22	2058.2	97.4	0.0220
0.0210	0.4355	0.8548	11.57	2153.6	95.4	0.0215
0.0220	0.4429	0.8524	11.93	2252.0	98.4	0.0211
0.0230	0.4499	0.8500	12.27	2346.1	94.1	0.0206
0.023967	0.4565	0.8478	12.60	2438.2	92.1	0.0203

f'_c = 31.6 MPa E_c = 26400 MPa E_s = 200000 MPa

f_s = 120 MPa n = 7.6

Cuantía balanceada = 0.028015 Cuantía mínima = 0.005856

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1159	0.9614	2.07	115.3		0.0931
0.0020	0.1598	0.9467	3.00	226.9	111.6	0.0664
0.0025	0.1769	0.9410	3.39	282.2	55.3	0.0595
0.0030	0.1920	0.9360	3.75	337.0	54.8	0.0545
0.0040	0.2180	0.9273	4.40	444.7	107.7	0.0474
0.0050	0.2403	0.9199	4.99	551.5	106.8	0.0426
0.005856	0.2571	0.9143	5.46	641.7	90.2	0.0395
0.0060	0.2598	0.9134	5.54	657.3	15.6	0.0390
0.0070	0.2773	0.9076	6.06	762.6	105.3	0.0362
0.0080	0.2932	0.9023	6.55	866.4	103.8	0.0340
0.0090	0.3077	0.8974	7.02	969.2	102.8	0.0321
0.0100	0.3212	0.8929	7.47	1071.2	102.0	0.0306
0.0110	0.3338	0.8887	7.91	1173.2	102.0	0.0292
0.0120	0.3455	0.8848	8.34	1274.8	101.6	0.0280
0.0130	0.3566	0.8811	8.75	1374.6	99.8	0.0270
0.0140	0.3670	0.8777	9.15	1473.7	99.1	0.0260
0.0150	0.3769	0.8744	9.55	1573.7	100.0	0.0252
0.0160	0.3863	0.8712	9.94	1672.6	98.9	0.0245
0.0170	0.3953	0.8682	10.32	1770.9	98.3	0.0238
0.0180	0.4039	0.8654	10.70	1870.0	99.1	0.0231
0.0190	0.4121	0.8626	11.07	1967.6	97.6	0.0225
0.0200	0.4199	0.8600	11.43	2063.8	96.2	0.0220
0.0210	0.4275	0.8575	11.79	2161.0	97.2	0.0215
0.0220	0.4348	0.8551	12.15	2258.7	97.7	0.0210
0.0230	0.4418	0.8527	12.50	2354.5	95.8	0.0206
0.0240	0.4485	0.8505	12.84	2448.9	94.4	0.0202
0.0250	0.4551	0.8483	13.19	2546.1	97.2	0.0198
0.0260	0.4614	0.8462	13.53	2641.3	95.2	0.0195
0.0270	0.4675	0.8442	13.86	2735.0	93.7	0.0191
0.0280	0.4734	0.8422	14.19	2828.8	93.8	0.0188
0.028015	0.4735	0.8422	14.20	2831.4	2.6	0.0188

f'_c = 35.2 MPa E_c = 28000 MPa E_s = 200000 MPa

f_s = 120 MPa n = 7.2

Cuantía balanceada = 0.032038 Cuantía mínima = 0.006180

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1130	0.9623	2.12	115.3		0.0931
0.0020	0.1559	0.9480	3.08	227.6	112.3	0.0663
0.0025	0.1726	0.9425	3.48	283.1	55.5	0.0594
0.0030	0.1874	0.9375	3.84	337.3	54.2	0.0544
0.0040	0.2129	0.9290	4.51	446.0	108.7	0.0474
0.0050	0.2347	0.9218	5.11	552.8	106.8	0.0425
0.0060	0.2539	0.9154	5.67	658.9	106.1	0.0390
0.006180	0.2571	0.9143	5.77	678.2	19.3	0.0384
0.0070	0.2711	0.9096	6.20	764.4	86.2	0.0362
0.0080	0.2867	0.9044	6.70	868.6	104.2	0.0339
0.0090	0.3010	0.8997	7.18	972.2	103.6	0.0321
0.0100	0.3142	0.8953	7.64	1074.6	102.4	0.0305
0.0110	0.3266	0.8911	8.08	1175.8	101.2	0.0292
0.0120	0.3382	0.8873	8.52	1278.4	102.6	0.0280
0.0130	0.3491	0.8836	8.94	1378.8	100.4	0.0269
0.0140	0.3594	0.8802	9.35	1478.9	100.1	0.0260
0.0150	0.3691	0.8770	9.75	1578.0	99.1	0.0252
0.0160	0.3784	0.8739	10.15	1678.2	100.2	0.0244
0.0170	0.3873	0.8709	10.54	1777.6	99.4	0.0237
0.0180	0.3958	0.8681	10.92	1876.0	98.4	0.0231
0.0190	0.4039	0.8654	11.29	1973.1	97.1	0.0225
0.0200	0.4116	0.8628	11.66	2070.4	97.3	0.0220
0.0210	0.4191	0.8603	12.02	2166.9	96.5	0.0215
0.0220	0.4263	0.8579	12.38	2263.8	96.9	0.0210
0.0230	0.4333	0.8556	12.74	2361.6	97.8	0.0206
0.0240	0.4399	0.8534	13.09	2457.1	95.5	0.0202
0.0250	0.4464	0.8512	13.44	2553.4	96.3	0.0198
0.0260	0.4527	0.8491	13.79	2650.4	97.0	0.0194
0.0270	0.4587	0.8471	14.12	2743.3	92.9	0.0191
0.0280	0.4646	0.8451	14.46	2838.7	95.4	0.0188
0.0290	0.4703	0.8432	14.80	2934.5	95.8	0.0185
0.0300	0.4758	0.8414	15.13	3028.6	94.1	0.0182
0.0310	0.4812	0.8396	15.46	3123.0	94.4	0.0179
0.0320	0.4865	0.8378	15.79	3217.9	94.9	0.0176
0.032038	0.4867	0.8378	15.80	3221.3	3.4	0.0176

f'_c = 42.2 MPa E_c = 30500 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 120 MPa n = 6.6
Cuantía balanceada = 0.040454 Cuantía mínima = 0.006767

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1085	0.9638	2.21	115.6		0.0930
0.0020	0.1498	0.9501	3.20	227.7	112.1	0.0663
0.0030	0.1802	0.9399	4.00	338.7	111.0	0.0543
0.0040	0.2049	0.9317	4.69	447.7	109.0	0.0473
0.0050	0.2260	0.9247	5.31	554.8	107.1	0.0425
0.0060	0.2446	0.9185	5.89	661.6	106.8	0.0389
0.006767	0.2575	0.9142	6.31	742.7	81.1	0.0367
0.0070	0.2613	0.9129	6.43	766.9	24.2	0.0361
0.0080	0.2764	0.9079	6.95	872.0	105.1	0.0339
0.0090	0.2904	0.9032	7.44	975.7	103.7	0.0320
0.0100	0.3033	0.8989	7.92	1079.6	103.9	0.0304
0.0110	0.3153	0.8949	8.37	1180.8	101.2	0.0291
0.0120	0.3266	0.8911	8.82	1283.5	102.7	0.0279
0.0130	0.3372	0.8876	9.25	1384.3	100.8	0.0269
0.0140	0.3473	0.8842	9.67	1484.7	100.4	0.0260
0.0150	0.3569	0.8810	10.09	1586.3	101.6	0.0251
0.0160	0.3659	0.8780	10.49	1685.0	98.7	0.0244
0.0170	0.3746	0.8751	10.89	1784.9	99.9	0.0237
0.0180	0.3829	0.8724	11.28	1884.0	99.1	0.0230
0.0190	0.3909	0.8697	11.67	1983.7	99.7	0.0225
0.0200	0.3985	0.8672	12.05	2082.1	98.4	0.0219
0.0210	0.4058	0.8647	12.42	2179.1	97.0	0.0214
0.0220	0.4129	0.8624	12.79	2277.2	98.1	0.0210
0.0230	0.4197	0.8601	13.15	2373.5	96.3	0.0205
0.0240	0.4263	0.8579	13.51	2470.5	97.0	0.0201
0.0250	0.4327	0.8558	13.87	2568.1	97.6	0.0197
0.0260	0.4388	0.8537	14.22	2663.4	95.3	0.0194
0.0270	0.4448	0.8517	14.57	2759.8	96.4	0.0190
0.0280	0.4506	0.8498	14.91	2854.7	94.9	0.0187
0.0290	0.4562	0.8479	15.25	2949.4	94.7	0.0184
0.0300	0.4617	0.8461	15.59	3045.1	95.7	0.0181
0.0310	0.4670	0.8443	15.93	3140.5	95.4	0.0178
0.0320	0.4722	0.8426	16.27	3236.7	96.2	0.0176
0.0330	0.4772	0.8409	16.60	3330.6	93.9	0.0173
0.0340	0.4821	0.8393	16.92	3423.1	92.5	0.0171
0.0350	0.4869	0.8377	17.25	3517.9	94.8	0.0169
0.0360	0.4915	0.8362	17.57	3610.6	92.7	0.0166
0.0370	0.4961	0.8346	17.90	3705.7	95.1	0.0164
0.0380	0.5005	0.8332	18.22	3799.0	93.3	0.0162
0.0390	0.5049	0.8317	18.54	3892.7	93.7	0.0160
0.0400	0.5091	0.8303	18.86	3986.1	93.4	0.0158
0.040454	0.5110	0.8297	19.00	4027.8	41.7	0.0158

f'_c = 14.1 MPa E_c = 17600 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 170 MPa n = 11.4
Cuantía balanceada = 0.005503 Cuantía mínima = 0.003333

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1400	0.9533	2.43	162.2		0.0785
0.0020	0.1920	0.9360	3.54	318.1	155.9	0.0561
0.0030	0.2296	0.9235	4.44	470.7	152.6	0.0461
0.003333	0.2403	0.9199	4.72	521.7	51.0	0.0438
0.0040	0.2598	0.9134	5.23	620.5	98.8	0.0401
0.0050	0.2854	0.9049	5.96	769.6	149.1	0.0360
0.005503	0.2970	0.9010	6.30	842.9	73.3	0.0344

f'_c = 17.6 MPa E_c = 19700 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 170 MPa n = 10.2
Cuantía balanceada = 0.007472 Cuantía mínima = 0.003333

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1330	0.9557	2.56	162.7		0.0784
0.0020	0.1826	0.9391	3.72	319.0	156.3	0.0560
0.0030	0.2187	0.9271	4.67	473.4	154.4	0.0460
0.003333	0.2290	0.9237	4.95	523.5	50.1	0.0437
0.0040	0.2478	0.9174	5.49	624.0	100.5	0.0400
0.0050	0.2724	0.9092	6.24	772.7	148.7	0.0360
0.0060	0.2940	0.9020	6.94	920.2	147.5	0.0330
0.0070	0.3132	0.8956	7.60	1065.9	145.7	0.0306
0.007472	0.3216	0.8928	7.90	1134.1	68.2	0.0297

f'_c = 21.1 MPa E_c = 21600 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 170 MPa n = 9.3
Cuantía balanceada = 0.009555 Cuantía mínima = 0.003333

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1274	0.9575	2.67	162.9		0.0784
0.0020	0.1752	0.9416	3.88	320.0	157.1	0.0559
0.0030	0.2100	0.9300	4.86	474.6	154.6	0.0459
0.003333	0.2199	0.9267	5.15	524.7	50.1	0.0437
0.0040	0.2381	0.9206	5.71	625.8	101.1	0.0400
0.0050	0.2620	0.9127	6.49	776.0	150.2	0.0359
0.0060	0.2829	0.9057	7.21	923.7	147.7	0.0329
0.0070	0.3016	0.8995	7.89	1070.2	146.5	0.0306
0.0080	0.3185	0.8938	8.54	1215.6	145.4	0.0287
0.0090	0.3339	0.8887	9.16	1359.1	143.5	0.0271
0.009555	0.3420	0.8860	9.50	1439.3	80.2	0.0264

f'_c = 24.6 MPa E_c = 23300 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 170 MPa n = 8.6
Cuantía balanceada = 0.011740 Cuantía mínima = 0.003333

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1228	0.9591	2.77	163.1		0.0783
0.0020	0.1691	0.9436	4.02	320.7	157.6	0.0558
0.0030	0.2028	0.9324	5.03	475.6	154.9	0.0459
0.003333	0.2125	0.9292	5.33	526.2	50.6	0.0436
0.0040	0.2301	0.9233	5.91	627.8	101.6	0.0399
0.0050	0.2534	0.9155	6.71	778.3	150.5	0.0358
0.0060	0.2738	0.9087	7.45	926.8	148.5	0.0328
0.0070	0.2920	0.9027	8.15	1074.1	147.3	0.0305
0.0080	0.3085	0.8972	8.82	1220.6	146.5	0.0286
0.0090	0.3236	0.8921	9.46	1365.5	144.9	0.0271
0.0100	0.3376	0.8875	10.07	1508.6	143.1	0.0257
0.0110	0.3505	0.8832	10.67	1651.5	142.9	0.0246
0.011740	0.3596	0.8801	11.10	1756.5	105.0	0.0239

f'_c = 28.1 MPa E_c = 24900 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 170 MPa n = 8.0
Cuantía balanceada = 0.013794 Cuantía mínima = 0.003333

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1187	0.9604	2.86	163.0		0.0783
0.0020	0.1636	0.9455	4.16	321.7	158.7	0.0558
0.0030	0.1964	0.9345	5.19	476.3	154.6	0.0458
0.003333	0.2058	0.9314	5.51	528.1	51.8	0.0435
0.0040	0.2230	0.9257	6.10	629.6	101.5	0.0399
0.0050	0.2457	0.9181	6.92	780.5	150.9	0.0358
0.0060	0.2655	0.9115	7.68	929.3	148.8	0.0328
0.0070	0.2833	0.9056	8.40	1077.5	148.2	0.0305
0.0080	0.2995	0.9002	9.09	1225.4	147.9	0.0286
0.0090	0.3142	0.8953	9.74	1369.9	144.5	0.0270
0.0100	0.3279	0.8907	10.37	1514.3	144.4	0.0257
0.0110	0.3407	0.8864	10.98	1658.0	143.7	0.0246
0.0120	0.3526	0.8825	11.57	1800.1	142.1	0.0236
0.0130	0.3638	0.8787	12.15	1942.0	141.9	0.0227
0.013794	0.3722	0.8759	12.60	2053.9	111.9	0.0221

f'_c = 31.6 MPa E_c = 26400 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 170 MPa n = 7.6
Cuantía balanceada = 0.016218 Cuantía mínima = 0.003346

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1159	0.9614	2.93	163.2		0.0783
0.0020	0.1598	0.9467	4.25	321.5	158.3	0.0558
0.0030	0.1920	0.9360	5.32	478.0	156.5	0.0457
0.003346	0.2015	0.9328	5.64	530.0	52.0	0.0434
0.0040	0.2180	0.9273	6.24	630.7	100.7	0.0398
0.0050	0.2403	0.9199	7.08	782.5	151.8	0.0357
0.0060	0.2598	0.9134	7.85	931.4	148.9	0.0328
0.0070	0.2773	0.9076	8.58	1079.7	148.3	0.0304
0.0080	0.2932	0.9023	9.28	1227.5	147.8	0.0285
0.0090	0.3077	0.8974	9.94	1372.4	144.9	0.0270
0.0100	0.3212	0.8929	10.58	1517.2	144.8	0.0257
0.0110	0.3338	0.8887	11.21	1662.7	145.5	0.0245
0.0120	0.3455	0.8848	11.81	1805.1	142.4	0.0235
0.0130	0.3566	0.8811	12.40	1948.0	142.9	0.0227
0.0140	0.3670	0.8777	12.97	2088.9	140.9	0.0219
0.0150	0.3769	0.8744	13.53	2229.5	140.6	0.0212
0.0160	0.3863	0.8712	14.08	2369.3	139.8	0.0205
0.016218	0.3883	0.8706	14.20	2400.2	30.9	0.0204

f'_c = 35.2 MPa E_c = 28000 MPa E_s = 200000 MPa
f_s = 170 MPa n = 7.2
Cuantía balanceada = 0.018630 Cuantía mínima = 0.003532

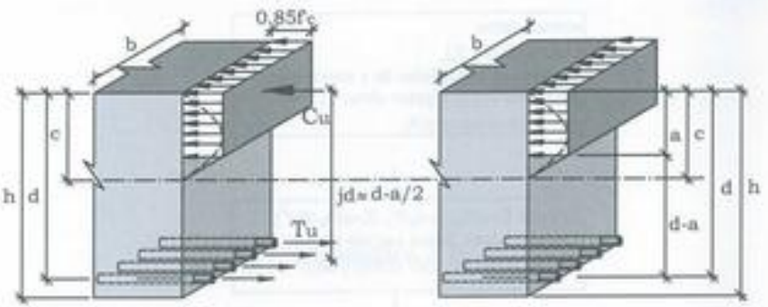
ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1130	0.9623	3.01	163.7		0.0782
0.0020	0.1559	0.9480	4.36	322.2	158.5	0.0557
0.0030	0.1874	0.9375	5.45	478.7	156.5	0.0457
0.003532	0.2015	0.9328	5.96	560.1	81.4	0.0423
0.0040	0.2129	0.9290	6.39	631.9	71.8	0.0398
0.0050	0.2347	0.9218	7.24	783.2	151.3	0.0357
0.0060	0.2539	0.9154	8.03	933.2	150.0	0.0327
0.0070	0.2711	0.9096	8.78	1082.5	149.3	0.0304
0.0080	0.2867	0.9044	9.49	1230.3	147.8	0.0285
0.0090	0.3010	0.8997	10.17	1377.1	146.8	0.0269
0.0100	0.3142	0.8953	10.82	1521.9	144.8	0.0256
0.0110	0.3266	0.8911	11.45	1666.2	144.3	0.0245
0.0120	0.3382	0.8873	12.07	1811.0	144.8	0.0235
0.0130	0.3491	0.8836	12.66	1952.6	141.6	0.0226
0.0140	0.3594	0.8802	13.25	2095.8	143.2	0.0218
0.0150	0.3691	0.8770	13.81	2235.2	139.4	0.0212
0.0160	0.3784	0.8739	14.37	2376.0	140.8	0.0205
0.0170	0.3873	0.8709	14.93	2517.9	141.9	0.0199
0.0180	0.3958	0.8681	15.47	2657.7	139.8	0.0194
0.018630	0.4009	0.8664	15.80	2744.0	86.3	0.0191

f'_c = 42.2 MPa E_c = 30500 MPa E_s = 200000 MPa
f_y = 170 MPa n = 6.6
Cuantía balanceada = 0.023723 Cuantía mínima = 0.003867

ρ	k	j	f_c (MPa)	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.1085	0.9638	3.13	163.7		0.0782
0.0020	0.1498	0.9501	4.54	323.1	159.4	0.0556
0.0025	0.1659	0.9447	5.12	401.2	78.1	0.0499
0.0030	0.1802	0.9399	5.66	479.3	78.1	0.0457
0.003867	0.2018	0.9327	6.51	612.7	133.4	0.0404
0.0040	0.2049	0.9317	6.64	633.8	21.1	0.0397
0.0050	0.2260	0.9247	7.52	785.8	152.0	0.0357
0.0060	0.2446	0.9185	8.34	936.9	151.1	0.0327
0.0070	0.2613	0.9129	9.11	1086.6	149.7	0.0303
0.0080	0.2764	0.9079	9.84	1234.6	148.0	0.0285
0.0090	0.2904	0.9032	10.54	1382.3	147.7	0.0269
0.0100	0.3033	0.8989	11.21	1528.1	145.8	0.0256
0.0110	0.3153	0.8949	11.86	1673.2	145.1	0.0244
0.0120	0.3266	0.8911	12.49	1817.5	144.3	0.0235
0.0130	0.3372	0.8876	13.10	1960.4	142.9	0.0226
0.0140	0.3473	0.8842	13.71	2105.1	144.7	0.0218
0.0150	0.3569	0.8810	14.29	2246.6	141.5	0.0211
0.0160	0.3659	0.8780	14.86	2387.0	140.4	0.0205
0.0170	0.3746	0.8751	15.43	2529.1	142.1	0.0199
0.0180	0.3829	0.8724	15.98	2669.0	139.9	0.0194
0.0190	0.3909	0.8697	16.53	2809.8	140.8	0.0189
0.0200	0.3985	0.8672	17.06	2947.8	138.0	0.0184
0.0210	0.4058	0.8647	17.59	3086.1	138.3	0.0180
0.0220	0.4129	0.8624	18.11	3224.3	138.2	0.0176
0.0230	0.4197	0.8601	18.63	3362.6	138.3	0.0172
0.023723	0.4245	0.8585	19.00	3462.1	99.5	0.0170

APÉNDICE 2.A

METODO DE LA RESISTENCIA ÚLTIMA
VIGAS RECTANGULARES CON ARMADURA A LA TRACCIÓN



Esquema

Momento último en kN·m.
Dimensiones en m.
Esfuerzos en MPa.
Armadura en m^2.

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \qquad a = \frac{\rho f_y}{0.85 f'_c} d \quad \therefore \quad \frac{a}{d} = \frac{\rho f_y}{0.85 f'_c}$$

$$jd = d - \frac{a}{2} \quad \therefore \quad j = 1 - \frac{a}{2d}$$

$$K = \phi \rho f_y \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c}\right)$$

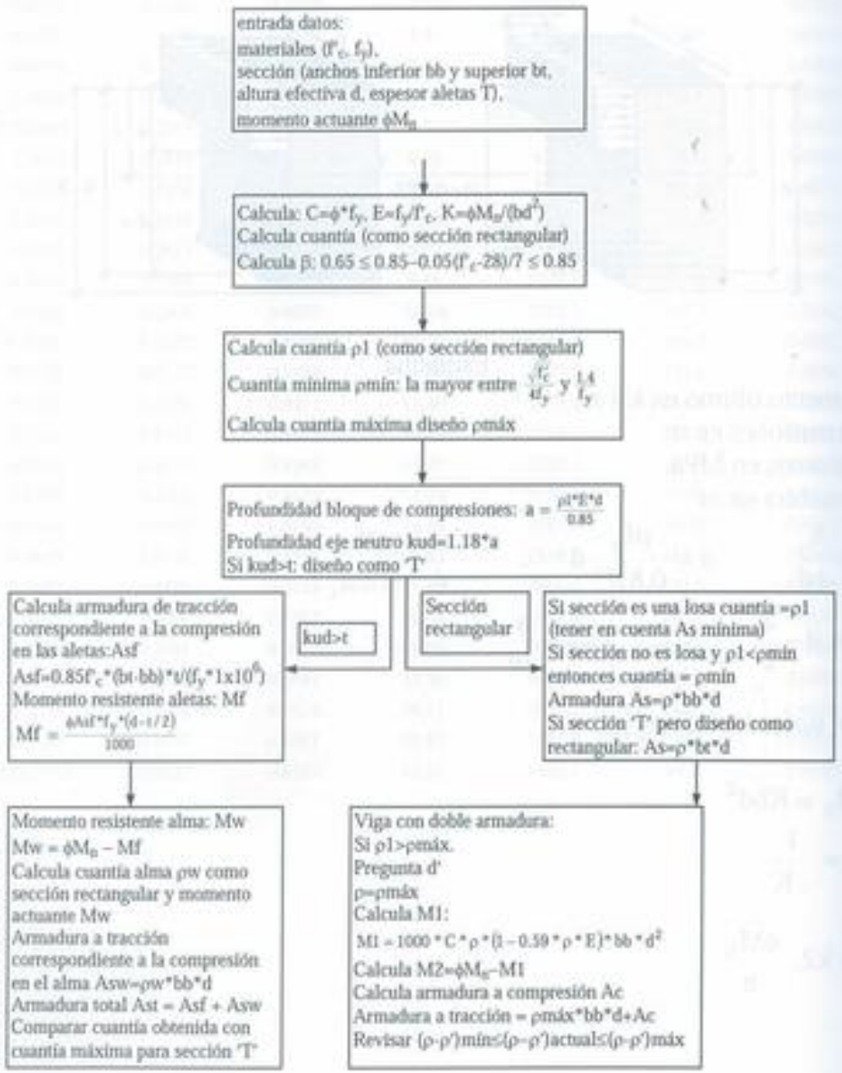
$$\phi M_n = K b d^2$$

$$k2 = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

$$d = k2 \sqrt{\frac{\phi M_n}{b}}$$

Diagrama de flujo para el diseño de vigas a la flexión por el método de la resistencia última

Calidad de materiales en MPa, dimensiones de la sección en metros y momentos en kN·m.



Apendice 2 B

TABLAS PARA DISEÑO.

MÉTODO DE LA RESISTENCIA ÚLTIMA

VIGAS RECTANGULARES CON ARMADURA A LA TRACCION

f'_c = 14.1 MPa β1 = 0.85
f_y = 240 MPa
Cuantía mínima = 0.005833 Cuantía máxima de diseño = 0.01593

ρ	a/d	j	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.0200	0.9900	213.8		0.0684
0.0020	0.0401	0.9800	423.3	209.5	0.0486
0.0025	0.0501	0.9750	526.4	103.1	0.0436
0.0030	0.0601	0.9700	628.5	102.1	0.0399
0.0040	0.0801	0.9600	829.3	200.8	0.0347
0.0050	0.1001	0.9500	1025.8	196.5	0.0312
0.005833	0.1168	0.9416	1186.1	160.3	0.0290
0.0060	0.1202	0.9399	1217.9	31.8	0.0287
0.0070	0.1402	0.9299	1405.7	187.8	0.0267
0.0080	0.1602	0.9199	1589.2	183.5	0.0251
0.0090	0.1802	0.9099	1768.3	179.1	0.0238
0.0100	0.2003	0.8999	1943.1	174.8	0.0227
0.0110	0.2203	0.8899	2113.5	170.4	0.0218
0.0120	0.2403	0.8799	2279.6	166.1	0.0209
0.0130	0.2603	0.8699	2441.4	161.8	0.0202
0.0140	0.2804	0.8598	2598.8	157.4	0.0196
0.0150	0.3004	0.8498	2751.9	153.1	0.0191
0.015930	0.3190	0.8405	2890.4	138.5	0.0186

f'_c = 17.6 MPa β1 = 0.85
f_y = 240 MPa
Cuantía mínima = 0.005833 Cuantía máxima de diseño = 0.01988

ρ	a/d	j	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.0160	0.9920	214.3		0.0683
0.0020	0.0321	0.9840	425.0	210.7	0.0485
0.0025	0.0401	0.9800	529.1	104.1	0.0435
0.0030	0.0481	0.9760	632.4	103.3	0.0398
0.0040	0.0642	0.9679	836.2	203.8	0.0346
0.0050	0.0802	0.9599	1036.6	200.4	0.0311
0.005833	0.0936	0.9532	1200.8	164.2	0.0289
0.0060	0.0963	0.9519	1233.4	32.6	0.0285
0.0070	0.1123	0.9439	1426.8	193.4	0.0265
0.0080	0.1283	0.9359	1616.8	190.0	0.0249
0.0090	0.1444	0.9278	1803.2	186.4	0.0235
0.0100	0.1604	0.9198	1986.2	183.0	0.0224
0.0110	0.1765	0.9118	2165.7	179.5	0.0215
0.0120	0.1925	0.9038	2341.8	176.1	0.0207
0.0130	0.2086	0.8957	2514.3	172.5	0.0199
0.0140	0.2246	0.8877	2683.4	169.1	0.0193
0.0150	0.2406	0.8797	2849.0	165.6	0.0187
0.0160	0.2567	0.8717	3011.1	162.1	0.0182
0.0170	0.2727	0.8637	3169.8	158.7	0.0178
0.0180	0.2888	0.8556	3324.9	155.1	0.0173
0.0190	0.3048	0.8476	3476.6	151.7	0.0170
0.019880	0.3189	0.8406	3607.3	130.7	0.0166

f'_c = 21.1 MPa β1 = 0.85
f_y = 240 MPa

Cuantía mínima = 0.005833 Cuantía máxima de diseño = 0.02384

ρ	a/d	j	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.0134	0.9933	214.6		0.0683
0.0020	0.0268	0.9866	426.2	211.6	0.0484
0.0025	0.0335	0.9833	530.9	104.7	0.0434
0.0030	0.0401	0.9800	635.0	104.1	0.0397
0.0040	0.0535	0.9733	840.8	205.8	0.0345
0.0050	0.0669	0.9666	1043.8	203.0	0.0310
0.005833	0.0781	0.9610	1210.6	166.8	0.0287
0.0060	0.0803	0.9599	1243.8	33.2	0.0284
0.0070	0.0937	0.9532	1441.0	197.2	0.0263
0.0080	0.1071	0.9465	1635.2	194.2	0.0247
0.0090	0.1204	0.9398	1826.6	191.4	0.0234
0.0100	0.1338	0.9331	2015.0	188.4	0.0223
0.0110	0.1472	0.9264	2200.6	185.6	0.0213
0.0120	0.1606	0.9197	2383.3	182.7	0.0205
0.0130	0.1740	0.9130	2563.0	179.7	0.0198
0.0140	0.1873	0.9064	2739.9	176.9	0.0191
0.0150	0.2007	0.8997	2913.9	174.0	0.0185
0.0160	0.2141	0.8930	3084.9	171.0	0.0180
0.0170	0.2275	0.8863	3253.1	168.2	0.0175
0.0180	0.2409	0.8796	3418.3	165.2	0.0171
0.0190	0.2543	0.8729	3580.7	162.4	0.0167
0.0200	0.2676	0.8662	3740.2	159.5	0.0164
0.0210	0.2810	0.8595	3896.7	156.5	0.0160
0.0220	0.2944	0.8528	4050.4	153.7	0.0157
0.0230	0.3078	0.8461	4201.2	150.8	0.0154
0.023840	0.3190	0.8405	4325.6	124.4	0.0152

f'_c = 24.6 MPa β1 = 0.85
f_y = 240 MPa

Cuantía mínima = 0.005833 Cuantía máxima de diseño = 0.02779

ρ	a/d	j	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.0115	0.9943	214.8		0.0682
0.0020	0.0230	0.9885	427.0	212.2	0.0484
0.0025	0.0287	0.9857	532.2	105.2	0.0433
0.0030	0.0344	0.9828	636.8	104.6	0.0396
0.0040	0.0459	0.9771	844.1	207.3	0.0344
0.0050	0.0574	0.9713	1048.9	204.8	0.0309
0.005833	0.0669	0.9666	1217.6	168.7	0.0287
0.0060	0.0689	0.9656	1251.2	33.6	0.0283
0.0070	0.0803	0.9599	1451.1	199.9	0.0263
0.0080	0.0918	0.9541	1648.4	197.3	0.0246
0.0090	0.1033	0.9484	1843.3	194.9	0.0233
0.0100	0.1148	0.9426	2035.7	192.4	0.0222
0.0110	0.1263	0.9369	2225.6	189.9	0.0212
0.0120	0.1377	0.9312	2413.0	187.4	0.0204
0.0130	0.1492	0.9254	2597.9	184.9	0.0196
0.0140	0.1607	0.9197	2780.3	182.4	0.0190
0.0150	0.1722	0.9139	2960.3	180.0	0.0184
0.0160	0.1836	0.9082	3137.7	177.4	0.0179
0.0170	0.1951	0.9025	3312.7	175.0	0.0174
0.0180	0.2066	0.8967	3485.2	172.5	0.0169
0.0190	0.2181	0.8910	3655.2	170.0	0.0165
0.0200	0.2296	0.8852	3822.7	167.5	0.0162
0.0210	0.2410	0.8795	3987.7	165.0	0.0158
0.0220	0.2525	0.8738	4150.2	162.5	0.0155
0.0230	0.2640	0.8680	4310.3	160.1	0.0152
0.0240	0.2755	0.8623	4467.8	157.5	0.0150
0.0250	0.2869	0.8566	4622.9	155.1	0.0147
0.0260	0.2984	0.8508	4775.5	152.6	0.0145
0.0270	0.3099	0.8451	4925.6	150.1	0.0142
0.02779	0.3190	0.8405	5042.4	116.8	0.0141

$f'_c = 28.1$ MPa $\beta 1 = 0.85$

$f_y = 240$ MPa

Cuantía mínima = 0.005833 Cuantía máxima de diseño = 0.03175

ρ	a/d	j	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.0100	0.9950	214.9		0.0682
0.0020	0.0201	0.9900	427.6	212.7	0.0484
0.0025	0.0251	0.9875	533.2	105.6	0.0433
0.0030	0.0301	0.9850	638.2	105.0	0.0396
0.0040	0.0402	0.9799	846.6	208.4	0.0344
0.0050	0.0502	0.9749	1052.8	206.2	0.0308
0.005833	0.0586	0.9707	1222.9	170.1	0.0286
0.0060	0.0603	0.9699	1256.8	33.9	0.0282
0.0070	0.0703	0.9649	1458.7	201.9	0.0262
0.0080	0.0804	0.9598	1658.3	199.6	0.0246
0.0090	0.0904	0.9548	1855.8	197.5	0.0232
0.0100	0.1005	0.9498	2051.2	195.4	0.0221
0.0110	0.1105	0.9448	2244.3	193.1	0.0211
0.0120	0.1206	0.9397	2435.3	191.0	0.0203
0.0130	0.1306	0.9347	2624.1	188.8	0.0195
0.0140	0.1407	0.9297	2810.7	186.6	0.0189
0.0150	0.1507	0.9247	2995.1	184.4	0.0183
0.0160	0.1608	0.9196	3177.4	182.3	0.0177
0.0170	0.1708	0.9146	3357.4	180.0	0.0173
0.0180	0.1809	0.9096	3535.3	177.9	0.0168
0.0190	0.1909	0.9046	3711.1	175.8	0.0164
0.0200	0.2010	0.8995	3884.6	173.5	0.0160
0.0210	0.2110	0.8945	4056.0	171.4	0.0157
0.0220	0.2211	0.8895	4225.2	169.2	0.0154
0.0230	0.2311	0.8845	4392.2	167.0	0.0151
0.0240	0.2412	0.8794	4557.0	164.8	0.0148
0.0250	0.2512	0.8744	4719.7	162.7	0.0146
0.0260	0.2613	0.8694	4880.2	160.5	0.0143
0.0270	0.2713	0.8644	5038.5	158.3	0.0141
0.0280	0.2813	0.8594	5194.7	156.2	0.0139
0.0290	0.2914	0.8543	5348.6	153.9	0.0137
0.0300	0.3014	0.8493	5500.4	151.8	0.0135
0.0310	0.3115	0.8443	5650.0	149.6	0.0133
0.03175	0.3190	0.8405	5760.8	110.8	0.0132

$f'_c = 31.6$ MPa $\beta 1 = 0.82$

$f_y = 240$ MPa

Cuantía mínima = 0.005856 Cuantía máxima de diseño = 0.03444

ρ	a/d	j	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.0089	0.9956	215.0		0.0682
0.0020	0.0179	0.9911	428.1	213.1	0.0483
0.0025	0.0223	0.9889	534.0	105.9	0.0433
0.0030	0.0268	0.9866	639.3	105.3	0.0396
0.0040	0.0357	0.9822	848.5	209.2	0.0343
0.0050	0.0447	0.9777	1055.8	207.3	0.0308
0.005856	0.0523	0.9739	1231.7	175.9	0.0285
0.0060	0.0536	0.9732	1261.2	29.5	0.0282
0.0070	0.0625	0.9688	1464.6	203.4	0.0261
0.0080	0.0715	0.9643	1666.1	201.5	0.0245
0.0090	0.0804	0.9598	1865.6	199.5	0.0232
0.0100	0.0894	0.9553	2063.2	197.6	0.0220
0.0110	0.0983	0.9509	2258.9	195.7	0.0210
0.0120	0.1072	0.9464	2452.6	193.7	0.0202
0.0130	0.1162	0.9419	2644.4	191.8	0.0194
0.0140	0.1251	0.9375	2834.3	189.9	0.0188
0.0150	0.1340	0.9330	3022.2	187.9	0.0182
0.0160	0.1430	0.9285	3208.2	186.0	0.0177
0.0170	0.1519	0.9241	3392.3	184.1	0.0172
0.0180	0.1608	0.9196	3574.4	182.1	0.0167
0.0190	0.1698	0.9151	3754.6	180.2	0.0163
0.0200	0.1787	0.9107	3932.8	178.2	0.0159
0.0210	0.1876	0.9062	4109.2	176.4	0.0156
0.0220	0.1966	0.9017	4283.5	174.3	0.0153
0.0230	0.2055	0.8973	4456.0	172.5	0.0150
0.0240	0.2144	0.8928	4626.5	170.5	0.0147
0.0250	0.2234	0.8883	4795.1	168.6	0.0144
0.0260	0.2323	0.8839	4961.7	166.6	0.0142
0.0270	0.2413	0.8794	5126.4	164.7	0.0140
0.0280	0.2502	0.8749	5289.2	162.8	0.0138
0.0290	0.2591	0.8705	5450.0	160.8	0.0135
0.0300	0.2681	0.8660	5608.9	158.9	0.0134
0.0310	0.2770	0.8615	5765.8	156.9	0.0132
0.0320	0.2859	0.8571	5920.9	155.1	0.0130
0.0330	0.2949	0.8526	6074.0	153.1	0.0128
0.0340	0.3038	0.8481	6225.1	151.1	0.0127
0.03444	0.3077	0.8462	6291.0	65.9	0.0126

f'_c = 35.2 MPa $\beta 1$ = 0.80

f_y = 240 MPa

Cuantía mínima = 0.006180 Cuantía máxima de diseño = 0.03743

ρ	a/d	j	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.0080	0.9960	215.1		0.0682
0.0020	0.0160	0.9920	428.5	213.4	0.0483
0.0025	0.0201	0.9900	534.6	106.1	0.0432
0.0030	0.0241	0.9880	640.2	105.6	0.0395
0.0040	0.0321	0.9840	850.1	209.9	0.0343
0.0050	0.0401	0.9800	1058.3	208.2	0.0307
0.0060	0.0481	0.9760	1264.7	206.4	0.0281
0.006180	0.0496	0.9752	1301.7	37.0	0.0277
0.0070	0.0561	0.9720	1469.4	167.7	0.0261
0.0080	0.0642	0.9679	1672.4	203.0	0.0245
0.0090	0.0722	0.9639	1873.6	201.2	0.0231
0.0100	0.0802	0.9599	2073.1	199.5	0.0220
0.0110	0.0882	0.9559	2270.9	197.8	0.0210
0.0120	0.0963	0.9519	2466.9	196.0	0.0201
0.0130	0.1043	0.9479	2661.2	194.3	0.0194
0.0140	0.1123	0.9439	2853.7	192.5	0.0187
0.0150	0.1203	0.9399	3044.5	190.8	0.0181
0.0160	0.1283	0.9359	3233.6	189.1	0.0176
0.0170	0.1364	0.9318	3420.9	187.3	0.0171
0.0180	0.1444	0.9278	3606.5	185.6	0.0167
0.0190	0.1524	0.9238	3790.3	183.8	0.0162
0.0200	0.1604	0.9198	3972.4	182.1	0.0159
0.0210	0.1684	0.9158	4152.8	180.4	0.0155
0.0220	0.1765	0.9118	4331.4	178.6	0.0152
0.0230	0.1845	0.9078	4508.3	176.9	0.0149
0.0240	0.1925	0.9038	4683.5	175.2	0.0146
0.0250	0.2005	0.8998	4856.9	173.4	0.0143
0.0260	0.2086	0.8957	5028.6	171.7	0.0141
0.0270	0.2166	0.8917	5198.6	170.0	0.0139
0.0280	0.2246	0.8877	5366.8	168.2	0.0137
0.0290	0.2326	0.8837	5533.2	166.4	0.0134
0.0300	0.2406	0.8797	5698.0	164.8	0.0132
0.0310	0.2487	0.8757	5861.0	163.0	0.0131
0.0320	0.2567	0.8717	6022.2	161.2	0.0129
0.0330	0.2647	0.8677	6181.8	159.6	0.0127
0.0340	0.2727	0.8637	6339.5	157.7	0.0126
0.0350	0.2807	0.8597	6495.6	156.1	0.0124
0.0360	0.2888	0.8556	6649.9	154.3	0.0123
0.0370	0.2968	0.8516	6802.5	152.6	0.0121
0.03743	0.3002	0.8499	6867.5	65.0	0.0121

f'_c = 42.2 MPa $\beta 1$ = 0.75

f_y = 240 MPa

Cuantía mínima = 0.006767 Cuantía máxima de diseño = 0.04207

ρ	a/d	j	K (kN/m²)	ΔK	k2
0.0010	0.0067	0.9967	215.3		0.0682
0.0020	0.0134	0.9933	429.1	213.8	0.0483
0.0030	0.0201	0.9900	641.5	212.4	0.0395
0.0040	0.0268	0.9866	852.4	210.9	0.0343
0.0050	0.0335	0.9833	1061.9	209.5	0.0307
0.0060	0.0401	0.9800	1269.9	208.0	0.0281
0.006767	0.0453	0.9774	1428.5	158.6	0.0265
0.0070	0.0468	0.9766	1476.5	48.0	0.0260
0.0080	0.0535	0.9733	1681.6	205.1	0.0244
0.0090	0.0602	0.9699	1885.3	203.7	0.0230
0.0100	0.0669	0.9666	2087.5	202.2	0.0219
0.0110	0.0736	0.9632	2288.3	200.8	0.0209
0.0120	0.0803	0.9599	2487.6	199.3	0.0200
0.0130	0.0870	0.9565	2685.5	197.9	0.0193
0.0140	0.0937	0.9532	2881.9	196.4	0.0186
0.0150	0.1004	0.9498	3076.9	195.0	0.0180
0.0160	0.1071	0.9465	3270.5	193.6	0.0175
0.0170	0.1137	0.9432	3462.5	192.0	0.0170
0.0180	0.1204	0.9398	3653.2	190.7	0.0165
0.0190	0.1271	0.9365	3842.4	189.2	0.0161
0.0200	0.1338	0.9331	4030.1	187.7	0.0158
0.0210	0.1405	0.9298	4216.4	186.3	0.0154
0.0220	0.1472	0.9264	4401.2	184.8	0.0151
0.0230	0.1539	0.9231	4584.6	183.4	0.0148
0.0240	0.1606	0.9197	4766.5	181.9	0.0145
0.0250	0.1673	0.9164	4947.0	180.5	0.0142
0.0260	0.1740	0.9130	5126.1	179.1	0.0140
0.0270	0.1807	0.9097	5303.6	177.5	0.0137
0.0280	0.1873	0.9064	5479.8	176.2	0.0135
0.0290	0.1940	0.9030	5654.5	174.7	0.0133
0.0300	0.2007	0.8997	5827.7	173.2	0.0131
0.0310	0.2074	0.8963	5999.5	171.8	0.0129
0.0320	0.2141	0.8930	6169.8	170.3	0.0127
0.0330	0.2208	0.8896	6338.7	168.9	0.0126
0.0340	0.2275	0.8863	6506.2	167.5	0.0124
0.0350	0.2342	0.8829	6672.1	165.9	0.0122
0.0360	0.2409	0.8796	6836.7	164.6	0.0121
0.0370	0.2476	0.8762	6999.8	163.1	0.0120
0.0380	0.2543	0.8729	7161.4	161.6	0.0118
0.0390	0.2609	0.8696	7321.6	160.2	0.0117
0.0400	0.2676	0.8662	7480.4	158.8	0.0116
0.0410	0.2743	0.8629	7637.6	157.2	0.0114
0.0420	0.2810	0.8595	7793.5	155.9	0.0113
0.04207	0.2815	0.8593	7804.3	10.8	0.0113

REFERENCIAS

Nilson, A. H; Darwin, D; Dolan, C. W.,"Design of Concrete Structures" 14th Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 2009.

Wight, J. K.; MacGregor, J. G., Reinforced Concrete - Mechanics and Design", Fifth Edition, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2009

Nadim Hassoun, M.; Al-Manaseer, A., "Structural Concrete – Theory and Design", Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc, New Jersey, 2008.

Fanella, D., A., "Reinforced Concrete Structures – Analysis and Design" – Mc Graw-Hill Book Co., New York, 2010.

Wang, C., K.; Salmon, C.,G.; Pincheira, J. A.,"Reinforced Concrete Design", 7th Edition, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2007.

Paulay, T.; Priestley, M. J. N., "Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings", John Wiley & Sons, Inc.,New York, 1992.

Park, R.; Paulay, T., "Reinforced Concrete Structures" John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, 1975.

Gómez, A. M., "Concreto I (1ª y 2ª Parte)", Universidad Nacional, Bogotá, 1972.

Kerpel, E., "Concreto II", Universidad Nacional, Bogotá, 1971.

Kerpel, E., "Introducción al Análisis Plástico de Estructuras de Concreto Reforzado", Universidad Nacional, Bogotá, 1981.

Hsu, T. T. C.; Mo, Y. L., "Unified Theory of Concrete Structures", John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2010.

Park, R.; Gamble, W. L., "Reinforced Concrete Slabs" 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, 1999.

- García, L. E., "Columnas y Muros Estructurales de Concreto Reforzado", Universidad de los Andes, Bogotá, 1990.

Ardila, E.; Monroy, L. D., "Diseño de Columnas en Concreto Reforzado", (UNCOL 2.5) Proyecto de Grado presentado a la Universidad Nacional, sede Bogotá, para optar al grado de "Ingeniero Civil", 1992.

- AIS Comité 100, "Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente NSR-10", Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica AIS, Bogotá D.C., 2010

- ACI Comité 318, "Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-08) y Comentario", American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2008.

"Notes on ACI 318-08 Building Code Requirements for Structural Concrete", Portland Cement Association, Illinois, 2008.

"Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures" (ASCE/SEI 7-10)", ASCE, Reston, VA, 2010.

"Requisitos Esenciales para Edificios de Concreto Reforzado (IPS-1)", Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica AIS, Instituto de Normas Técnicas y Certificación ICONTEC y ACI Committee 314, Simplified Design of Concrete Buildings, American Concrete Institute, Bogotá D.C., 2003.

Joint ACI-ASCE Committee 352, "Recommendations for Design of Beam-Column Connections in Monolithic Reinforced Concrete Structures (ACI 352R-02)," American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 2002.

MCP 2010 ACI, "Manual of Concrete Practice", American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2010.

Bresler, B., "Design Criteria for Reinforced Concrete Columns under Axial Load and Biaxial Bending," ACI JOURNAL, Proceedings V. 57, No.. 5, Nov. 1960.

SP-17 2009, ACI Design Handbook, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2009.

****

INDICE ALFABETICO

Abaco (figura): 369

Anclaje, longitud de: 173, 174, 217

Bresler, método de: 319, 320,321

Cajones: 507, 513 (figura)

Capitel (figura): 335, 369
- viguetas de: 377, 378 (figura), 382

Carga(s)
- coeficiente de: 72
- crítica de columnas: 312, 318, 319
- de falla para columnas cortas: 282
- de trabajo para columnas: 282
- horizontales: 540
- muertas: 540
- vivas: 540

Cimentación, definición de: 425
- profundidad, de
  - pilotes: *ver pilotes*
  - cajones: *ver cajones*
- superficiales
  - para columnas
    - aisladas: 426 (figura), 433, 443, 449, 455
    - combinadas: 427 (figura), 461, 476
    - con viga de contrapeso: 482
  - para muros: 426 (figura), 428

Coeficiente(s)
- de amplificación de momentos: 312, 313, 314, 317, 318,319
- de dilatación térmica: 5
- Método de los: 336, 344
- para deflexión a largo plazo: 119, 126
- de capacidad de disipación de energía: 542

de longitud efectiva (columnas): 312, 313
de reducción de resistencia, definición: 75
para compresión, 283
para cortante: 133
para flexión: 75
para presión de contacto: 436
para torsión: 158
longitud de desarrollo, afectación de: 177, 185, 203, 205, 212, 215, 217

Columnas
confinamiento
estribos de: 276-280, 322-328
longitud de: 277-280, 324, 325
definición: 267
diagrama de interacción para: 290
dimensionamiento: 268
esbeltez, efectos de: 309, 310, 317
esfuerzo cortante en: 322-329
reducción de sección: 269
refuerzo longitudinal: 269, 319
refuerzo transversal
espirales: 274-276
estribos: 272, 322, 327
nudos, requisitos en: 273, 328
tipos de: 267

Concreto
compresión-deformación (figura): 5
definición: 3
dilatación, coeficiente de: 5
elasticidad, módulo de: 6, 10
esfuerzo de trabajo: 17
fluencia lenta: 6
fraguado, retracción de: 6
peso unitario: 5
reforzado: 3, 9
resistencia nominal a la compresión: 3

Contención, muros de: 517
con contrafuertes (figura): 518
de gravedad: 517 (figura)
en voladizo: 518 (figura), 519, 522
estabilidad, análisis de: 524
estructural, análisis: 528
predimensionamiento: 523
refuerzo, colocación del: 534

Cortante, fuerza: 132
nominal total, fuerza: 132
refuerzo mínimo de: 138 (vigas)
resistencia proporcionada por el concreto: 135
resistencia proporcionada por el refuerzo: 135
acción en dos direcciones para losas aéreas: 372, 374 (figura)
acción en dos direcciones para zapatas: 433 (figura), 434

Cuantía
balanceada: 24 (Método Elástico), 63 (Método de la Resistencia)
definición: 20
especificación para ρ-ρ':86, 87
máxima de diseño (vigas): 69
mínima para flexión (vigas): 77
mínima para flexión (losas macizas): 77, 229, 230
para vigas "T": 106

Deflexiones
control de: 96, 116
evaluación: 123
largo plazo: 119
límites para : 119

Deriva
definición: 311, 316
límite de: 316

Desarrollo, longitud de: 185, 207 (figura), 212, 215,217

Diseño
balanceado, definición: 17

elementos estructurales, de: 542
Método Directo de: 369, 370
óptimo, definición: 18
sobre-reforzado, definición: 17
sub-reforzado, definición: 18

Efectiva, altura: 18

Eje neutro
deformaciones respecto al: 16
profundidad según Método Elástico: 19, 35, 53
profundidad según Método de la Resistencia: 61, 62

Elástico, método: 15

Equivalente, Método del Pórtico: 369, 382, 403

Empalme, longitud de: 176
en columnas: 270, 271

Empuje
sobre muros: 520-522, 525, 527

Esbeltez, efectos de:
en columnas: 309
evaluación: 309
locales: 317

Estabilidad
índice de: 311, 316
análisis de (muros de contención): 524

Estructural(es)
análisis (muros de contención): 528
métodos de análisis: 542
no, diseño de elementos: 543
sistemas: 541

f_c, esfuerzo máximo admisible de compresión por flexión, 10, 19
f'_c, resistencia nominal del concreto a la compresión: 4
Flexión, fórmula de la: 15
Fluencia lenta: 6, 96

Fluencia, método de las líneas de: 357, 358
Franjas, división de losas en: 344, 351
análisis de: 342, 343, 351, 352, 374-376
Fraguado, retracción de: 6, 118, 126
f_s, esfuerzo máximo admisible del acero a tracción, 19
f_y, resistencia nominal a la fluencia del acero: 8
Gancho estándar: 178, 180, 205
Giro, radio de (elementos a compresión): 309
Hooke, ley de: 16
Losas
nervadas en una dirección: 237
especificaciones: 239
espesor mínimo: 116, 117
análisis aproximado: 240
armadas en dos direcciones: 333
apoyadas en columnas: 369,
apoyadas en los bordes: 336, 344, 357
refuerzo en macizas: 346, 347
tipos de: 333, 334-335 (figuras)
espesores mínimos para: 116, 117, 122, 226, 339, 340, 341
macizas en una dirección: 225
espesor mínimo: 116, 117, 122
refuerzo mínimo: *ver cuantía*
recubrimiento mínimo: *ver refuerzo*

Módulo
de elasticidad del concreto: 6, 10
de elasticidad del refuerzo: 8
de ruptura del concreto: 118

Momento interior resistente
según Método Elástico: 16, 20, 37, 42
según Método de la Resistencia: 62, 76, 86, 99, 105, 113

Momento
de fisuración: 118
de inercia (según sección transformada): 35, 53
de inercia efectivo (para el cálculo de deflexiones): 118
magnificación de: 311,312

Pedestal (figura): 442
Pilotes: 495, 498 (figura)
Puntal tensor, método: 503
Refuerzo
cuantía del: 20
definición: 3
desarrollo de la resistencia: 173
dimensiones nominales de las barras: 11
distribución en la sección: 22, 26, 77
elasticidad, módulo de: 8
empalmes del: 176, 177, 270 (columnas)
en espiral: 267, 274
esfuerzo de fluencia: 8
esfuerzo-deformación (figura): 9
esfuerzo de trabajo: 19
espaciamiento máximo en losas: 77, 78, 229, 230
estribos perpendiculares: 139
límites de espaciamiento para cortante: 137 (vigas), 272 (columnas)
longitudinal doblado: 141
longitudinal para torsión: 159
para columnas: 268-280, 319-329
recubrimiento mínimo: 22 (vigas), 229 (losas), 270 (columnas), 429, 443 (cimientos)
transversal combinado para cortante y torsión: 165, 166
transversal para cortante: 135
transversal para torsión: 160
Relación modular: 10
Resistencia
al aplastamiento: 441, 435
de diseño: 75 (flexión), 282 (columnas)
Método de la: 58
Riostras en losa aligerada: 239, 252 (figura)
Seguridad, factor de:
72-75 (flexión), 283, 292 (columnas)
Torsión
definición: 158

refuerzo para: 150, 166, 167
resistencia nominal a la: 150
Traslapo, longitud de: 176, 270
Vigas
de capitel: 377, 378 (figura), 381
rectangulares: 18, 48, 58, 85
"T": 40, 101
Viguetas
especificaciones: 239
diseño: 246
Whitney, Método de: 65

La 7ª. Edición de Estructuras de Concreto I se terminó
de imprimir en los talleres de Ayala Avila y Cia Ltda
a los30 días del mes de Abril de dos mil once